# HỆ - BẤT - PHƯƠNG TRÌNH TRONG CÁC ĐỀ THI THỬ NĂM 2016

**Bài 1: Giải hệ phương trình:** $\begin{cases} \sqrt{3-x}+\sqrt{y+1}=x^3+2y^2-9x-5 \\ x^3-y^3+12x-3y=3y^2-6x^2-7 \end{cases}$.

**Lần 2 – THPT ANH SƠN 2**

**Lời giải tham khảo**

Điều Kiện : $\begin{cases} x\le 3 \\ y\ge -1 \end{cases}$

Phương trình thứ 2 tương đương với $(x+2)^3=(y+1)^3 \Leftrightarrow y=x+1$ (3)

Thay (3) vào phương trình thứ nhất ta được:

$\sqrt{3-x}+\sqrt{x+2}=x^3+2x^2-5x-3$ điều kiện $-2\le x\le 3$

$\Leftrightarrow \sqrt{3-x}+\sqrt{x+2}=x^3+2x^2-5x-3 \Leftrightarrow \sqrt{3-x}+\sqrt{x+2}-3=x^3+2x^2-5x-6$

$$\Leftrightarrow \frac{2(\sqrt{(3-x)(x+2)}-2)}{\sqrt{3-x}+\sqrt{x+2}+3}=x^3+2x^2-5x-6$$

$$\Leftrightarrow \frac{2(-x^2+x+2)}{(\sqrt{3-x}+\sqrt{x+2}+3)(\sqrt{(3-x)(x+2)}+2)}=(x+1)(x-2)(x+3)$$

$$\Leftrightarrow \frac{2(-x^2+x+2)}{(\sqrt{3-x}+\sqrt{x+2}+3)(\sqrt{(3-x)(x+2)}+2)}=(x^2-x-2)(x+3)$$

$$\Leftrightarrow (x^2-x-2)(\frac{2}{(\sqrt{3-x}+\sqrt{x+2}+3)(\sqrt{(3-x)(x+2)}+2)}+(x+3))=0$$

Do điều kiện $-2\le x\le 3$ nên $\frac{2}{(\sqrt{3-x}+\sqrt{x+2}+3)(\sqrt{(3-x)(x+2)}+2)}+(x+3)>0$

Suy ra $x^2-x-2=0 \Leftrightarrow x=-1; x=2$ thoả mãn điều kiện.

Khi $x=-1 \Rightarrow y=0$ TMĐK

Khi $x=2 \Rightarrow y=3$ TMĐK

Vậy hệ đã cho có hai nghiệm (-1;0), (2;3)

**Bài 2: Giải phương trình** $x^3+x+2\left(x^2+1\right)\sqrt{x}=6$.

**Lần 1 – THPT BẮC YÊN THÀNH**

**Lời giải tham khảo**

ĐK: $x\ge 0$. Nhận thấy (0; y) không là nghiệm của hệ phương trình. Xét $x>0$.

Từ phương trình thứ 2 ta có $2y+2y\sqrt{4y^2+1}=\frac{1}{x}+\frac{1}{x}\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}$ (1)◎Xét hàm số $f(t)=t+t\sqrt{t^2+1}$ có $f'(t)=1+\sqrt{t^2+1}+\frac{t^2}{\sqrt{t^2+1}}>0$ nên hàm số đồng biến. Vậy $(1)\Leftrightarrow f(2y)=f\left(\frac{1}{x}\right)\Leftrightarrow 2y=\frac{1}{x}$.

Xét hàm số $f(t)=t+t\sqrt{t^2+1}$ có $f'(t)=1+\sqrt{t^2+1}+\frac{t^2}{\sqrt{t^2+1}}>0$ nên hàm số đồng biến. Vậy $(1)\Leftrightarrow f(2y)=f\left(\frac{1}{x}\right)\Leftrightarrow 2y=\frac{1}{x}$.

Thay vào phương trình (1): $x^3+x+2\left(x^2+1\right)\sqrt{x}=6$

Vế trái của phương trình là hàm đồng biến trên $(0;+\infty)$ nên có nghiệm duy nhất

$x=1$ và hệ phương trình có nghiệm $\left(1;\dfrac{1}{2}\right)$.

**Bài 3: Giải hệ phương trình:** $\begin{cases} 2x^2+y^2+x=3(xy+1)+2y \\ \dfrac{2}{3+\sqrt{2x-y}}+\dfrac{2}{3+\sqrt{4-5x}}=\dfrac{9}{2x-y+9} \end{cases}$ $(x,y)\in\mathbb{R}$.

**Lần 1– THPT BẢO THẮNG SỐ 3**

**Lời giải tham khảo**

**ĐK :** $\begin{cases} 2x-y\ge 0 \\ x\le \dfrac{4}{5} \end{cases}$

Biến đổi phương trình thứ nhất của hệ ta có :

$2x^2+y^2+x=3(xy+1)+2y \Leftrightarrow (x-y-1)(2x-y+3)=0 \Leftrightarrow y=x-1$

Với $y=x-1$ thay vào phương trình thứ hai ta được phương trình sau :

$$\frac{2}{3+\sqrt{x+1}}+\frac{2}{3+\sqrt{4-5x}}=\frac{9}{x+10}$$

$$=> 2(x+10)\left(6+\sqrt{x+1}+\sqrt{4-5x}\right)=9\left(9+3\sqrt{x+1}+3\sqrt{4-5x}+\sqrt{x+1}\sqrt{4-5x}\right)$$

$$\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{4-5x}-3\right)\left(9\sqrt{x+1}+9\sqrt{4-5x}-4x+41\right)=0 \circledcirc$$

( Do $x\in\left[-1;\dfrac{4}{5}\right]$ nên $9\sqrt{x+1}+9\sqrt{4-5x}-4x+41>0$ )

$\Leftrightarrow \sqrt{x+1}+\sqrt{4-5x}-3=0$

$\Leftrightarrow \sqrt{x+1}+\sqrt{4-5x}=3 \Leftrightarrow 2\sqrt{x+1}.\sqrt{4-5x}=4+4x$

$\Leftrightarrow \sqrt{x+1}.\left(\sqrt{4-5x}-2\sqrt{x+1}\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sqrt{x+1}=0\\ \sqrt{4-5x}=2\sqrt{x+1}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-1\\ x=0\end{array}\right.$

Với $x=0 => y=-1; x=-1 => y=-2$

Đối chiếu với điều kiện và thay lại hệ phương trình ban đầu ta thấy hệ đã cho có nghiệm : $(x;y)=(0;-1);(x;y)=(-1;-2)$

**Bài 4: Giải phương trình:** $\sqrt{x+1}=\dfrac{x^2-x-2\sqrt[3]{2x+1}}{\sqrt[3]{2x+1}-3}$.

**Lần 1 – THPT BÌNH MINH**

**Lời giải tham khảo**

Điều kiện: $x\ge -1, x\ne 13$

Pt $\Leftrightarrow \sqrt{x+1}+2=\dfrac{x^2-x-6}{\sqrt[3]{2x+1}-3} \Leftrightarrow 1=\dfrac{(x+2)(\sqrt{x+1}-2)}{\sqrt[3]{2x+1}-3}$ ( x=3 không là nghiệm)

$\Leftrightarrow (2x+1)+\sqrt[3]{2x+1}=(x+1)\sqrt{x+1}+\sqrt{x+1}$

Hàm số $f(t)=t^3+t$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ do đó phương trình $\Leftrightarrow \sqrt[3]{2x+1}=\sqrt{x+1}$

$\begin{cases} x \geq -1/2 \\ (2x+1)^2 = (x+1)^3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1/2 \\ x^3 - x^2 - x = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1/2 \\ x = 0, x = \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x = 0, x = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

Vậy phương trình có nghiệm $S = \{0, \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\}$

**Bài 5: Giải hệ phương trình:** $\begin{cases} 32x^5 - 5\sqrt{y-2} = y(y-4)\sqrt{y-2} - 2x \\ (\sqrt{y-2} - 1)\sqrt{2x+1} = 8x^3 - 13(y-2) + 82x - 29 \end{cases} (x, y \in \mathbb{R})$.

**Lần 2 – THPT Bố Hạ**

**Lời giải tham khảo**

Đặt đk $x \geq -\dfrac{1}{2}, y \geq 2$

$+) (1) \Leftrightarrow (2x)^5 + 2x = (y^2 - 4y)\sqrt{y-2} + 5\sqrt{y-2} \Leftrightarrow (2x)^5 + 2x = \left(\sqrt{y-2}\right)^5 + \sqrt{y-2} (3)$

Xét hàm số $f(t) = t^5 + t, f'(t) = 5t^4 + 1 > 0, \forall x \in R$, suy ra hàm số f(t) liên tục trên R. Từ (3) ta có $f(2x) = f(\sqrt{y-2}) \Leftrightarrow 2x = \sqrt{y-2}$ Thay $2x = \sqrt{y-2} (x \geq 0)$ vào (2) được

Thay $2x = \sqrt{y-2} (x \geq 0)$ vào (2) được

$(2x-1)\sqrt{2x+1} = 8x^3 - 52x^2 + 82x - 29$

$\Leftrightarrow (2x-1)\sqrt{2x+1} = (2x-1)(4x^2 - 24x + 29) \Leftrightarrow (2x-1)\left(\sqrt{2x+1} - 4x^2 + 24x - 29\right) = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{1}{2} \\ \sqrt{2x+1} - 4x^2 + 24x - 29 = 0 (4) \end{array}\right.$

Với $x = \dfrac{1}{2}$. Ta có y=3

$(4) \Leftrightarrow (\sqrt{2x+1} - 2) - (4x^2 - 24x + 27) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{2x-3}{\sqrt{2x+1}+2} - (2x-3)(2x-9) = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 3/2 \\ \dfrac{1}{\sqrt{2x+1}+2}(2x-9) = 0 (5) \end{array}\right.$

Với $x = \dfrac{3}{2}$. Ta có y=11 Xét (5). Đặt $t = \sqrt{2x+1} \geq 0 \Rightarrow 2x = t^2 - 1$. Thay vao (5) được

$t^3 + 2t - 10 - 21 = 0 \Leftrightarrow (t+3)(t^2 - t - 7) = 0$. Tìm được $t = \dfrac{1+\sqrt{29}}{2}$.

Xét (5). Đặt $t = \sqrt{2x+1} \geq 0 \Rightarrow 2x = t^2 - 1$. Thay vao (5) được

$t^3 + 2t - 10 - 21 = 0 \Leftrightarrow (t+3)(t^2 - t - 7) = 0$. Tìm được $t = \dfrac{1+\sqrt{29}}{2}$.

Từ đó tìm được $x = \dfrac{13+\sqrt{29}}{4}, y = \dfrac{103+13\sqrt{29}}{2}$

**Bài 6: Giải hệ phương trình:** $\begin{cases} x^3 - y^3 - 3x^2 - 3y^2 - 24x + 24y + 52 = 0 \\ \dfrac{x^2}{4} + y^2 = 1 \end{cases}$.

**Lần 1 – THPT CAM RANH**

**Lời giải tham khảo**

Đk $\begin{cases} -2 \le x \le 2 \\ -1 \le y \le 1 \end{cases}$.

Đặt $t = y + 2$. Biến đổi phương trình đầu về dạng. $x^3 - 3x^2 - 24x = t^3 - 3t^2 - 24t$ ◎

Xét hàm số $f(x) = x^3 - 3x^2 - 24x$ liên tục trên $[-2;2]$

Chứng minh được x=t=y+2

Hệ pt được viết lại: $\begin{cases} x = y + 2 \\ \dfrac{x^2}{4} + y^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y + 2 \\ \left[ \begin{array}{l} y = 0 \\ y = -4/5 \end{array} \right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[ \begin{array}{l} \begin{cases} x = 2 \\ y = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x = 6/5 \\ y = -4/5 \end{cases} \end{array} \right.$

KẾT LUẬN:

**Bài 7: Giải hệ phương trình:** $\begin{cases} \mathbf{x^3 - 6x^2 + 13x = y^3 + y + 10} \\ \mathbf{\sqrt{2x + y + 5} - \sqrt{3 - x - y} = x^3 - 3x^2 - 10y + 6} \end{cases}$.

**Lần 2 – THPT CAM RANH**

**Lời giải tham khảo**

XÉT PT(1):

$x^3 - 6x^2 + 13x = y^3 + y + 10 \Leftrightarrow (x-2)^3 + (x-2) = y^3 + y$ (*)

Xét hàm số $f(t) = t^3 + t$. Ta có $f'(t) = 3t^2 + 1 > 0 \forall t \in \mathbb{R} \Rightarrow f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$

Do đó (*) $\Leftrightarrow y = x - 2$. Thay $y = x - 2$ vào (2) ta được: $\sqrt{3x+3} - \sqrt{5-2x} = x^3 - 3x^2 - 10x + 26$

$\Leftrightarrow \sqrt{3x+3} - 3 + 1 - \sqrt{5-2x} = x^3 - 3x^2 - 10x + 24 \quad (\text{ĐK}: -\dfrac{5}{2} \le x \le 1)$◎

$$\Leftrightarrow \frac{3(x-2)}{\sqrt{3x+3}+3} + \frac{2(x-2)}{1+\sqrt{5-2x}} = (x-2)(x^2 - x - 12)$$

$$\Leftrightarrow \left[ \begin{array}{l} x = 2 \\ \dfrac{3}{\sqrt{3x+3}+3} + \dfrac{2}{1+\sqrt{5-2x}} = x^2 - x - 12 \quad (3) \end{array} \right.$$

PT (3) vô nghiệm vì với $-\dfrac{5}{2} \le x \le 1$ thì $x^2 - x - 12 < 0$.

Hệ có nghiệm duy nhất $\begin{cases} x = 2 \\ y = 0 \end{cases}$

**Bài 8: Giải bất phương trình:** $\dfrac{x-3}{3\sqrt{x+1} + x + 3} \le \dfrac{2\sqrt{9-x}}{x}$.

**Lần 1– THPT CAO LÃNH 2**

**Lời giải tham khảo**

Điều kiện: $-1 \le x \le 9; x \ne 0$

$$(1) \Leftrightarrow \frac{x^2-3x-2\sqrt{9-x}\left(x+3+3\sqrt{x+1}\right)}{x\left(x+3+3\sqrt{x+1}\right)} \le 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x+3)^2-9(x+1)-2\sqrt{9-x}\left(x+3+3\sqrt{x+1}\right)}{x\left(x+3+3\sqrt{x+1}\right)} \le 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\left(x+3+3\sqrt{x+1}\right)\left(x+3-3\sqrt{x+1}-2\sqrt{9-x}\right)}{x\left(x+3+3\sqrt{x+1}\right)} \le 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x+3-3\sqrt{x+1}-2\sqrt{9-x}}{x} \le 0 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x+1}\left(\sqrt{x+1}-3\right)+2\left(1-\sqrt{9-x}\right)}{x} \le 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x-8}{x}\left(\frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}+3}+\frac{2}{1+\sqrt{9-x}}\right) \le 0 \Leftrightarrow \frac{x-8}{x} \le 0 \Leftrightarrow 0 < x \le 8$$

Kết hợp điều kiện ta được nghiệm của bất phương trình là $0 < x \le 8$

**Bài 9: Giải bất phương trình:** $x^2 + x - 1 \ge (x+2)\sqrt{x^2-2x+2}$

**Lần 1 – THPT chuyên LÊ QÚY ĐÔN - KH**

**Lời giải tham khảo**

TA CÓ : $x^2 - 2x - 7 + (x+2)(3 - \sqrt{x^2-2x+2}\,) \ge 0 \Leftrightarrow (x^2-2x-7)\left(\frac{\sqrt{(x-1)^2+1}-(x-1)}{3+\sqrt{x^2-2x+2}}\right) \ge 0.$

Vì: $\sqrt{(x-1)^2+1} > |x-1| \ge x-1$ nên : $\frac{\sqrt{(x-1)^2+1}-(x-1)}{3+\sqrt{x^2-2x+2}} > 0$, $\forall$x.

$\Rightarrow x^2 - 2x - 7 \ge 0 \Leftrightarrow x \le 1 - 2\sqrt{2} \vee 1 + 2\sqrt{2} \le x$

Vậy bất pt có tập nghiệm: $S = (-\infty; 1 - 2\sqrt{2}\,] \cup [1 + 2\sqrt{2}; +\infty)$

**Bài 10: Giải bất phương trình:** $x^3 - x + 2 \le 2\sqrt[3]{3x-2}$ ..

**Lần 1 – THPT chuyên NGUYỄN HUỆ**

**Lời giải tham khảo**

$$x^3 - x + 2 \le 2\sqrt[3]{3x-2}$$

$$\Leftrightarrow x^3 - 3x + 2 \le 2\sqrt[3]{3x-2} - 2x$$

$$\Leftrightarrow x^3 - 3x + 2 \le 2\frac{3x-2-x^3}{\sqrt[3]{3x-2}^2 + x\sqrt[3]{3x-2} + x^2}$$

$$\Leftrightarrow \left(x^3-3x+2\right)\left(1+\frac{2}{\sqrt[3]{3x-2}^2 + x\sqrt[3]{3x-2} + x^2}\right) \le 0$$

$$\Leftrightarrow x^3 - 3x + 2 \le 0 \quad \left(1+\frac{2}{\sqrt[3]{3x-2}^2 + x\sqrt[3]{3x-2} + x^2} > 0, \forall x \in \mathbb{R}\right)$$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x\le -2 \end{array}\right.$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $(-\infty;-2]\cup\{1\}$.

**Bài 11: Giải hệ phương trình:** $\begin{cases} x^3-y^3-3x^2+3x-6y-4=0 \\ y\left(\sqrt{2x+3}+\sqrt[3]{7y+13}\right)=3(x+1) \end{cases}$.

**Lần 2 – THPT CHUYÊN NGUYỄN HUỆ**

**Lời giải tham khảo**

Từ phương trình (1) ta có: $x^3+3x=(y+1)^3+3(y+1)$

Xét hàm số $f(t)=t^3+3t$ , $f'(t)=3t^2+3$

$f'(t)>0$ với mọi t suy ra hàm số $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

$f(x)=f(y+1)\Leftrightarrow x=y+1$ ◎Thế $x=y+1$ vào phương trình (2) ta được:

Thế $x=y+1$ vào phương trình (2) ta được:

$(x-1)\left(\sqrt{2x+3}+\sqrt[3]{7x+6}\right)=3(x+1)$ (3)

Ta có $x=1$ không là nghiệm phương trình. Từ đó:

$\left(\sqrt{2x+3}+\sqrt[3]{7x+6}\right)=\dfrac{3(x+1)}{x-1}$

Xét hàm số $g(x)=\left(\sqrt{2x+3}+\sqrt[3]{7x+6}\right)-\dfrac{3(x+1)}{x-1}$

TXĐ: $D=\left[-\dfrac{3}{2};+\infty\right)\backslash\{1\}$

$g'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2x+3}}+\dfrac{7}{3\sqrt[3]{(7x+6)^2}}+\dfrac{6}{(x-1)^2}$

$g'(x)>0\forall>-\dfrac{3}{2};x\ne 1, g'\left(-\dfrac{3}{2}\right)$ không xác định.

Hàm số đồng biến trên từng khoảng $\left(-\dfrac{3}{2};1\right)$ và $(1;+\infty)$.

Ta có $g(-1)=0; g(3)=0$. Từ đó phương trình $g(x)=0$ có đúng hai nghiệm $x=-1$ và $x=3$.

Vậy hệ phương trình có hai nghiệm $(-1;-2)$ và $(3;2)$.

**Bài 12: Giải hệ phương trình:** $\begin{cases} xy(x+1)=x^3+y^2+x-y \\ 3y\left(2+\sqrt{9x^2+3}\right)+(4y+2)\left(\sqrt{1+x+x^2}+1\right)=0 \end{cases}$.

**Lần 1 – THPT CHUYÊN SƠN LA**

**Lời giải tham khảo**

Biến đổi PT (1) $\Leftrightarrow (x-y)\left(x^2-y+1\right)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=x \\ y=x^2+1 \end{array}\right.$

$$3x\left(2+\sqrt{9x^2+3}\right)+(4x+2)\left(\sqrt{1+x+x^2}+1\right)=0$$

x = y thế vào PT (2) ta được: $\Leftrightarrow (2x+1)\left(\sqrt{(2x+1)^2+3}+2\right)=(-3x)\left(2+\sqrt{(-3x)^2+3}\right)$

$$\Leftrightarrow f(2x+1)=f(-3x)$$

Xét $f(t)=t\left(\sqrt{t^2+3}+2\right)$ có $f'(t)>0,\ \forall t.$

$f$ là hàm số đồng biến nên: $2x+1=-3x \Leftrightarrow x=-\frac{1}{5} \Rightarrow y=-\frac{1}{5}$ ◎ $y=x^2+1$

- $y=x^2+1$

Thế vào (2) $3(x^2+1)\left(2+\sqrt{9x^2+3}\right)+\left(4x^2+1+2\right)\left(\sqrt{1+x+x^2}+1\right)=0$

Vế trái luôn dương, PT vô nghiệm.

Vậy hệ có nghiệm duy nhất: $\left(-\frac{1}{5};-\frac{1}{5}\right)$.

**Bài 13: Giải hệ phương trình:** $\begin{cases} x^2+\dfrac{x}{x+1}=(y+2)\sqrt{(x+1)(y+1)} \\ 3x^2-8x-3=4(x+1)\sqrt{y+1} \end{cases}$ $(x,y\in\mathbb{R})$.

**Lần 1 – THPT CHUYÊN VĨNH PHÚC**

**Lời giải tham khảo**

Điều kiện: $\begin{cases} x>-1 \\ y\ge -1 \end{cases}$

$(1) \Leftrightarrow \dfrac{x^3+x^2+x}{x+1}=(y+2)\sqrt{(x+1)(y+1)} \Leftrightarrow \dfrac{x^3+x(x+1)}{(x+1)\sqrt{x+1}}=(y+2)\sqrt{y+1}$

$\Leftrightarrow \left(\dfrac{x}{\sqrt{x+1}}\right)^3+\dfrac{x}{\sqrt{x+1}}=\left(\sqrt{y+1}\right)^3+\sqrt{y+1}$.

Xét hàm số $f(t)=t^3+t$ trên $\mathbb{R}$ có $f'(t)=3t^2+1>0\forall t\in\mathbb{R}$ suy ra *f(t)* đồng biến trên $\mathbb{R}$. Nên $f\left(\dfrac{x}{\sqrt{x+1}}\right)=f\left(\sqrt{y+1}\right) \Leftrightarrow \dfrac{x}{\sqrt{x+1}}=\sqrt{y+1}$. Thay vào (2) ta được $3x^2-8x-3=4x\sqrt{x+1}$.

$$\Leftrightarrow (2x-1)^2=\left(x+2\sqrt{x+1}\right)^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2\sqrt{x+1}=x-1 \\ 2\sqrt{x+1}=1-3x \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x\ge 1 \\ x^2-6x-3=0 \end{cases} \\ \begin{cases} x\le \frac{1}{3} \\ 9x^2-10x-3=0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3+2\sqrt{3} \\ x=\dfrac{5-2\sqrt{13}}{9} \end{array}\right.$$

Ta có $y=\dfrac{x^2}{x+1}-1$

Với $x=3+2\sqrt{3} \Rightarrow y=\dfrac{4+3\sqrt{3}}{2}$. Với $x=\dfrac{5-2\sqrt{13}}{9} \Rightarrow y=-\dfrac{41+7\sqrt{13}}{72}$.

Các nghiệm này đều thỏa mãn điều kiện .

Hệ phương trình có hai nghiệm $(x;y)=\left(3+2\sqrt{3};\dfrac{4+3\sqrt{3}}{2}\right)$ & $(x;y)=\left(\dfrac{5-2\sqrt{13}}{9};-\dfrac{41+7\sqrt{13}}{72}\right)$.

**Bài 14: Giải hệ phương trình:** $\begin{cases} x^3 - y^3 + 8x - 8y = 3x^2 - 3y^2 \\ (5x^2 - 5y + 10)\sqrt{y+7} + (2y+6)\sqrt{x+2} = x^3 + 13y^2 - 6x + 32 \end{cases}$.

**Lần 2 – THPT CHUYÊN VĨNH PHÚC**

**Lời giải tham khảo**

Điều kiện : $\begin{cases} x+2 \ge 0 \\ y+7 \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge -2 \\ y \ge -7 \end{cases}$

Từ phương trình (1) ta có $(x-1)^3 + 5(x-1) = (y-1)^3 + 5(y-1)$ (3)

Thay (4) vào (2) ta được pt: $(5x^2 - 5x + 10)\sqrt{x+7} + (2x+6)\sqrt{x+2} = x^3 + 13x^2 - 6x + 32$ (5) Đ/K $x \ge -2$

$(5x^2 - 5x + 10)(\sqrt{x+7} - 3) + (2x+6)(\sqrt{x+2} - 2) = x^3 - 2x^2 + 5x - 10$ (5)

Xét hàm số $f(t) = t^3 + 5t$, trên tập $\mathbb{R}$, $f'(t) = 3t^2 + 5 > 0, \forall t \in \mathbb{R} \Rightarrow$ hàm số $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$. Từ (3): $f(x-1) = f(y-1) \Leftrightarrow x = y$

(4) ⊚ $(5x^2 - 5x + 10)(\sqrt{x+7} - 3) + (2x+6)(\sqrt{x+2} - 2) = x^3 - 2x^2 + 5x - 10$ (5)

$$(x-2)\left(\frac{5x^2 - 5x + 10}{\sqrt{x+7} + 3} + \frac{2x+6}{\sqrt{x+2} + 2}\right) = (x-2)(x^2 + 5)$$

- $x = 2 \xrightarrow{(4)} y = 2 \Rightarrow (x;y) = (2;2)$ ( thỏa mãn đ/k)
- $\dfrac{5x^2 - 5x + 10}{\sqrt{x+7} + 3} + \dfrac{2x+6}{\sqrt{x+2} + 2} - \left(\dfrac{5x^2 - 5x + 10}{5} + \dfrac{2x+6}{2}\right) = 0$

$(x-2)\left(\dfrac{5x^2 - 5x + 10}{\sqrt{x+7} + 3} + \dfrac{2x+6}{\sqrt{x+2} + 2} - (x^2 + 5)\right) = 0$ ⊚ $x = 2 \xrightarrow{(4)} y = 2 \Rightarrow (x;y) = (2;2)$ ( thỏa mãn đ/k)

$$\Leftrightarrow \left(\underbrace{5x^2 - 5x + 10}_{>0, \forall x \ge -2}\right)\underbrace{\left(\frac{1}{\sqrt{x+7} + 3} - \frac{1}{5}\right)}_{<0, \forall x \ge -2} + \left(\underbrace{2x+6}_{>0, \forall x \ge -2}\right)\underbrace{\left(\frac{1}{\sqrt{x+2} + 2} - \frac{1}{2}\right)}_{\le 0, \forall x \ge -2} = 0 \text{ (pt này vô nghiệm)}$$

Vậy hệ phương trình có một nghiệm duy nhất : $(x;y) = (2;2)$

**Bài 15: Giải bất phương trình:** $\dfrac{\sqrt{x+2} - 2}{\sqrt{6(x^2 + 2x + 4)} - 2(x+2)} \ge \dfrac{1}{2}$.

**Lần 3 – THPT chuyên VĨNH PHÚC**

**Lời giải tham khảo**

Điều kiện : $x \ge -2$

Do đó bất phương trình $\Leftrightarrow 2(\sqrt{x+2} - 2) \ge \sqrt{6(x^2 + 2x + 4)} - 2(x+2)$

$\Leftrightarrow 2\sqrt{x+2} + 2x \ge \sqrt{12(x+2) + 6x^2}$ (1)

Ta có $\sqrt{6(x^2 + 2x + 4)} - 2(x+2) = \dfrac{2(x^2 - 2x + 4)}{\sqrt{6(x^2 + 2x + 4)} + 2(x+2)} > 0, \forall x \ge -2$ ⊚Do đó bất phương trình

$\Leftrightarrow 2(\sqrt{x+2} - 2) \ge \sqrt{6(x^2 + 2x + 4)} - 2(x+2)$

Nhận xét $x=-2$ không là nghiệm của bất phương trình

$$2+2t\ge\sqrt{12+6t^2}\Leftrightarrow\begin{cases}2+2t\ge 0\\4+8t+4t^2\ge 12+6t^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t\ge -1\\2(t-2)^2\le 0\end{cases}\Leftrightarrow t=2$$

Khi $x>-2$ chia hai vế bất phương trinh (1) cho $\sqrt{x+2}>0$ ta được

$$2+2\cdot\frac{x}{\sqrt{x+2}}\ge\sqrt{12+6\left(\frac{x}{\sqrt{x+2}}\right)^2}$$ (2). Đặt $t=\frac{x}{\sqrt{x+2}}$ thì bất phương trình (2) được

$$t=2\Leftrightarrow\frac{x}{\sqrt{x+2}}=2\Leftrightarrow\begin{cases}x>0\\x^2-4x-8=0\end{cases}\Leftrightarrow x=2+2\sqrt{3}.$$

Bất phương trình có nghiệm duy nhất $x=2+2\sqrt{3}$.

**Bài 16: Giải hệ phương trình:** $\begin{cases}x\sqrt{1-97y^2}+y\sqrt{1-97x^2}=\sqrt{97}(x^2+y^2)\\27\sqrt{x}+8\sqrt{y}=\sqrt{97}\end{cases}(x,y\in\mathbb{R})..$

**Lần 2 – THPT CHUYÊN HẠ LONG**

**Lời giải tham khảo**

Điều kiện: $0\le x,y\le\frac{1}{\sqrt{97}}$

Thay $(x;y)$ bằng một trong các cặp số $(0;0),\left(0;\frac{1}{\sqrt{97}}\right),\left(\frac{1}{\sqrt{97}};0\right),\left(\frac{1}{\sqrt{97}};\frac{1}{\sqrt{97}}\right)$ vào (1), (2) ta thấy các cặp này đều không là nghiệm. Do đó $0<x,y<\frac{1}{\sqrt{97}}$

Đặt $\sqrt{97}x=a,\sqrt{97}y=b$. Do $0<x,y<\frac{1}{\sqrt{97}}$ nên $0<a,b<1$. Khi đó (1) trở thành

$$a\sqrt{1-b}+b\sqrt{1-a}=a^2+b^2\Leftrightarrow a\left(a-\sqrt{1-b^2}\right)+b\left(b-\sqrt{1-a^2}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow(a^2+b^2-1)\left(\frac{a}{a+\sqrt{1-b^2}}+\frac{b}{b+\sqrt{1-a^2}}\right)=0\Leftrightarrow a^2+b^2=1$$. Suy ra $x^2+y^2=\frac{1}{97}$.

Với các số dương $a_1,a_2,b_1,b_2$, ta có $a_1b_1+a_2b_2\le\sqrt{a_1^2+a_2^2}.\sqrt{b_1^2+b_2^2}$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a_1b_2=a_2b_1$. Thật vậy,

$$a_1b_1+a_2b_2\le\sqrt{a_1^2+a_2^2}.\sqrt{b_1^2+b_2^2}\Leftrightarrow(a_1b_1+a_2b_2)^2\le(a_1^2+a_2^2).(b_1^2+b_2^2)\Leftrightarrow(a_1b_2-a_2b_1)^2\ge 0$$

Do đó $27\sqrt{x}+8\sqrt{y}\le\sqrt{97}\sqrt{9x+4y}\le\sqrt{97}\sqrt{\sqrt{97}\sqrt{x^2+y^2}}=\sqrt{97}$ (do $x^2+y^2=\frac{1}{97}$ )

Đẳng thức xảy ra khi 4x = 9y và $x^2+y^2=\frac{1}{97}$ Đối chiếu với điều kiện ta được nghiệm của hệ pt đã cho là $(x;y)=\left(\frac{9}{97};\frac{4}{97}\right)$

Đối chiếu với điều kiện ta được nghiệm của hệ pt đã cho là $(x;y)=\left(\frac{9}{97};\frac{4}{97}\right)$

**Bài 17: Giải hệ phương trình:** $\begin{cases} 2x\left(x^2+3y^2\right)=7 \\ x^2+6xy+y^2=5x+3y \end{cases}$.

**Lần 1 – THPT CHUYÊN LONG AN**

**Lời giải tham khảo**

Đặt $\begin{cases} x+y=u \\ x-y=v \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{u+v}{2} \\ y=\dfrac{u-v}{2} \end{cases}$. Ta có hệ phương trình: $\begin{cases} u^3+v^3=7(1) \\ 2u^2-4u=v^2+v(2) \end{cases}$

Lấy (2) nhân với −3 rồi cộng với (1) ta được:

$u^3-6u^2+12u-8+v^3+3v^2+3v+1=0 \Leftrightarrow (u-2)^3+(v+1)^3=0$

$\Leftrightarrow u=1-v$ .⊚Thay vào phương trình (2), ta được: $v^2-v-2=0$

Thay vào phương trình (2), ta được: $v^2-v-2=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} v=-1 \\ v=2 \end{array}\right.$ ⊚+ $v=-1$ suy ra u = 2. Suy ra $(x,y)=\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{3}{2}\right)$

+ $v=-1$ suy ra u = 2. Suy ra $(x,y)=\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{3}{2}\right)$

+ $v=2$ suy ra u = −1. Suy ra $(x,y)=\left(\dfrac{1}{2},-\dfrac{3}{2}\right)$

**Bài 18: Giải hệ phương trình:** $\begin{cases} x^3-y^3-3y^2+3x-6y-4=0 \\ y\left(\sqrt{2x+3}+\sqrt[3]{7y+13}\right)=3(x+1) \end{cases}$.

**Lần 1 – THPT CHUYÊN NGUYỄN HUỆ**

**Lời giải tham khảo**

Điều kiện: $x \ge -\dfrac{3}{2}$

Từ pt(1) ta có $x^3+3x=(y+1)^3+3(y+1)$

Xét hàm số $f(t)=t^3+3t; f'(t)=3t^2+3>0, \forall t\in\mathbb{R}$ ⊚ $f'(t)>0$ với mọi $t$ suy ra hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$

$f'(t)>0$ với mọi $t$ suy ra hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$

Mà $f(x)=f(y+1)$ nên $x=y+1$

Thế $x=y+1$ vào pt(2) ta được: $(x-1)\left(\sqrt{2x+3}+\sqrt[3]{7x+6}\right)=3(x+1)$ (3)

Ta có $x=1$ không là nghiệm của pt(3). Từ đó $\sqrt{2x+3}+\sqrt[3]{7x+6}=\dfrac{3(x+1)}{x-1}$

Xét hàm số $g(x)=\sqrt{2x+3}+\sqrt[3]{7x+6}-\dfrac{3(x+1)}{x-1}$

Tập xác định $D=\left[-\dfrac{3}{2};+\infty\right)\backslash\{1\}$

$g'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2x+3}}+\dfrac{7}{3\sqrt[3]{(7x+6)^2}}+\dfrac{6}{(x-1)^2}$

$g(x)>0,\forall x>-\frac{3}{2}; x\neq 1, g'\left(-\frac{3}{2}\right)$ không xác định.

Hàm số đồng biến trên từng khoảng $\left(-\frac{3}{2};1\right)$ và $(1;+\infty)$ .Ta có $g(-1)=0; g(3)=0$ . Từ đó pt $g(x)=0$ có đúng hai nghiệm $x=-1$ và $x=3$.

Ta có $g(-1)=0; g(3)=0$ . Từ đó pt $g(x)=0$ có đúng hai nghiệm $x=-1$ và $x=3$.

Vậy hệ phương trình có hai nghiệm $(-1;-2)$ và $(3;2)$

**Bài 19: Giải bất phương trình:** $\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{3x^2-5}}\le\frac{2}{\sqrt{x^2-2}+1}$.

**Lần 1 – THPT ĐA PHÚC**

**Lời giải tham khảo**

+) Đặt $t = x^2 - 2$, bpt trở thành: $\frac{1}{\sqrt{t+3}}+\frac{1}{\sqrt{3t+1}}\le\frac{2}{\sqrt{t}+1}$ ĐK: $t\ge 0$ với đk trên, bpt tương đương $(\sqrt{t}+1)\left(\frac{1}{\sqrt{t+3}}+\frac{1}{\sqrt{3t+1}}\right)\le 2$. Theo Cô-si ta có:

$$\frac{\sqrt{t}}{\sqrt{t+3}}=\sqrt{\frac{t}{t+1}.\frac{t+1}{t+3}}\le\frac{1}{2}\left(\frac{t}{t+1}+\frac{t+1}{t+3}\right)$$

$$\frac{1}{\sqrt{t+3}}=\sqrt{\frac{1}{2}.\frac{2}{t+3}}\le\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{2}{t+3}\right)$$

$$\frac{\sqrt{t}}{\sqrt{3t+1}}=\sqrt{\frac{1}{2}.\frac{2t}{3t+1}}\le\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{2t}{3t+1}\right)$$

$$\frac{1}{\sqrt{3t+1}}=\sqrt{\frac{1}{t+1}.\frac{t+1}{3t+1}}\le\frac{1}{2}\left(\frac{1}{t+1}+\frac{t+1}{3t+1}\right)$$

$\Rightarrow VT\le 2\forall t\ge 0.$

$$\frac{\sqrt{t}}{\sqrt{3t+1}}=\sqrt{\frac{1}{2}.\frac{2t}{3t+1}}\le\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{2t}{3t+1}\right)$$

$$\frac{1}{\sqrt{3t+1}}=\sqrt{\frac{1}{t+1}.\frac{t+1}{3t+1}}\le\frac{1}{2}\left(\frac{1}{t+1}+\frac{t+1}{3t+1}\right)$$

$\Rightarrow VT\le 2\forall t\ge 0.$

+) Thay ẩn x được $x^2\ge 2\Leftrightarrow x\in(-\infty;-\sqrt{2}]\cup[\sqrt{2};+\infty)\Rightarrow T=(-\infty;-\sqrt{2}]\cup[\sqrt{2};+\infty)$.

**Bài 20: Giải phương trình:** $32x^4-16x^2-9x-9\sqrt{2x-1}+2=0$.

**Lần 2 – THPT ĐA PHÚC**

**Lời giải tham khảo**

Điều kiện $x\ge\frac{1}{2}$, phương trình đã cho tương đương

$$32x^4-32x^2+16x^2-16x+7x-7+9-9\sqrt{2x-1}=0$$

$$\Leftrightarrow 32x^2\left(x^2-1\right)+16x\left(x-1\right)+7(x-1)+9\left(1-\sqrt{2x-1}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow 32x^2\left(x-1\right)(x+1)+16x\left(x-1\right)+7(x-1)+\frac{9\left(2-2x\right)}{1+\sqrt{2x-1}}=0$$

$$\Leftrightarrow\left(x-1\right)\left[32x^2(x+1)+16x+7-\frac{18}{1+\sqrt{2x-1}}\right]=0$$

$$\Leftrightarrow\left(x-1\right)\left[32x^3+32x^2+16x+7-\frac{18}{1+\sqrt{2x-1}}\right]=0\ (*)$$

Ta có

$$x\ge\frac{1}{2}\Rightarrow\begin{cases}32x^3\ge\frac{32}{8}=4\\32x^2\ge\frac{32}{4}=8\Rightarrow 32x^3+32x^2+16x+7\ge 27\\16x\ge\frac{16}{2}=8\end{cases}$$

$$1+\sqrt{2x-1}\ge 1\Rightarrow -\frac{18}{1+\sqrt{2x-1}}\ge -18$$

$$\Rightarrow 32x^3+32x^2+16x+7-\frac{18}{1+\sqrt{2x-1}}\ge 9>0.$$

Vậy (*) $\Leftrightarrow x=1$.

**Kết luận:** Phương trình có nghiệm x =1.

**Bài 21: Giải hệ phương trình:** $\begin{cases}x+3\sqrt{xy+x-y^2-y}=5y+4\\\sqrt{4y^2-x-2}+\sqrt{y-1}=x-1\end{cases}$.

**Lần 1 – THPT PHƯỚC BÌNH**

**Lời giải tham khảo**

Đk: $\begin{cases}xy+x-y^2-y\ge 0\\4y^2-x-2\ge 0\\y-1\ge 0\end{cases}$. Ta có (1) $\Leftrightarrow x-y+3\sqrt{(x-y)(y+1)}-4(y+1)=0$

Đặt $u=\sqrt{x-y},v=\sqrt{y+1}$ $(u\ge 0,v\ge 0)$

Khi đó (1) trở thành : $u^2+3uv-4v^2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}u=v\\u=-4v(vn)\end{array}\right.$ ◎Với $u=v$ ta có $x=2y+1$, thay vào (2) ta được : $\sqrt{4y^2-2y-3}+\sqrt{y-1}=2y$

Với $u=v$ ta có $x=2y+1$, thay vào (2) ta được : $\sqrt{4y^2-2y-3}+\sqrt{y-1}=2y$

$$\Leftrightarrow\sqrt{4y^2-2y-3}-(2y-1)+\left(\sqrt{y-1}-1\right)=0\ \frac{2(y-2)}{\sqrt{4y^2-2y-3}+2y-1}+\frac{y-2}{\sqrt{y-1}+1}=0$$

$$\Leftrightarrow(y-2)\left(\frac{2}{\sqrt{4y^2-2y-3}+2y-1}+\frac{1}{\sqrt{y-1}+1}\right)=0\Leftrightarrow y=2$$

( vì $\Leftrightarrow\frac{2}{\sqrt{4y^2-2y-3}+2y-1}+\frac{1}{\sqrt{y-1}+1}>0\forall y\ge 1$)

Với $y=2$ thì $x=5$. Đối chiếu điều kiện ta được nghiệm của hệ PT là $(5;2)$

**Bài 22: Giải bất phương trình:** $\sqrt{x+1}\ge\frac{x^2-x-2\sqrt[3]{2x+1}}{\sqrt[3]{2x+1}-3}$.

**Lần 2 – THPT PHƯỚC BÌNH**

**Lời giải tham khảo**

- ĐK: $x \geq -1, x \neq 13$

- Khi đó: $\sqrt{x+1} \geq \dfrac{x^2 - x - 2\sqrt[3]{2x+1}}{\sqrt[3]{2x+1} - 3} \Leftrightarrow \sqrt{x+1} + 2 \geq \dfrac{x^2 - x - 6}{\sqrt[3]{2x+1} - 3}$

$$\Leftrightarrow 1 \geq \frac{(x+2)\left(\sqrt{x+1} - 2\right)}{\sqrt[3]{2x+1} - 3}, (*)$$

- Nếu $\sqrt[3]{2x+1} - 3 > 0 \Leftrightarrow x > 13$ (1)

thì (*) $\Leftrightarrow (2x+1) + \sqrt[3]{2x+1} \geq (x+1)\sqrt{x+1} + \sqrt{x+1}$

Do hàm $f(t) = t^3 + t$ là hàm đồng biến trên $\mathbb{R}$, mà (*):

$$f\left(\sqrt[3]{2x+1}\right) \geq f\left(\sqrt{x+1}\right) \Leftrightarrow \sqrt[3]{2x+1} \geq \sqrt{x+1} \Leftrightarrow x^3 - x^2 - x \leq 0$$

Suy ra: $x \in \left(-\infty; \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right] \cup \left[0; \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right] \xrightarrow{DK(1)} VN$

- Nếu $\sqrt[3]{2x+1} - 3 < 0 \Leftrightarrow -1 \leq x < 13$ (2)

thì (2*) $\Leftrightarrow (2x+1) + \sqrt[3]{2x+1} \leq (x+1)\sqrt{x+1} + \sqrt{x+1}$

Do hàm $f(t) = t^3 + t$ là hàm đồng biến trên $\mathbb{R}$, mà (2*):

$$f\left(\sqrt[3]{2x+1}\right) \leq f\left(\sqrt{x+1}\right) \Leftrightarrow \sqrt[3]{2x+1} \leq \sqrt{x+1} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -1 \leq x \leq -\dfrac{1}{2} \\ \begin{cases} -\dfrac{1}{2} < x < 13 \\ (2x+1)^2 \leq (x+1)^3 \end{cases} \end{array}\right.$$

Suy ra: $x \in [-1; 0] \cup \left[\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}; +\infty\right) \xrightarrow{DK(2)} x \in [-1; 0] \cup \left[\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}; 13\right)$

-KL: $x \in [-1; 0] \cup \left[\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}; 13\right)$

**Bài 23: Giải hệ phương trình:** $\begin{cases} x^2 + xy(2y-1) = 2y^3 - 2y^2 - x \\ 6\sqrt{x-1} + y + 7 = 4x(y-1) \end{cases}$.

**Lần 3 – THPT PHƯỚC BÌNH**

**Lời giải tham khảo**

ĐK: $x \geq 1$.

$(1) \Leftrightarrow (2y^2 + x)(1 + x - y) = 0 \Leftrightarrow y = x + 1$ vì $2y^2 + x > 0, \forall x \geq 1$

Thay vào (2) ta được $6\sqrt{x-1} + x + 8 = 4x^2 \Leftrightarrow \left(\sqrt{x-1} + 3\right)^2 = (2x)^2 \Leftrightarrow 2x = \sqrt{x-1} + 3$

$$\Leftrightarrow 2x - 3 = \sqrt{x-1} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x^2 - 13x + 10 = 0 \\ x \geq \dfrac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x = 2 \Rightarrow y = 3$$

Vậy nghiệm của phương trình là $(x; y) = (2; 3)$.

**Bài 24: Giải hệ phương trình:** $\begin{cases} 2x^3 - 4x^2 + 3x - 1 = 2x^3(2-y)\sqrt{3-2y} & (1) \\ \sqrt{x+2} = \sqrt[3]{14 - x\sqrt{3-2y}} + 1 & (2) \end{cases}$.

**Lần 4 – THPT PHƯỚC BÌNH**

**Lời giải tham khảo**

Ta thấy $x=0$ không phải là nghiệm của hệ, chia cả hai vế của (1) cho $x^3$ ta được

$$(1)\Leftrightarrow 2-\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2}-\frac{1}{x^3}=2(2-y)\sqrt{3-2y}$$

$$\Leftrightarrow\left(1-\frac{1}{x}\right)^3+\left(1-\frac{1}{x}\right)=(3-2y)\sqrt{3-2y}+\sqrt{3-2y}\quad (*)$$

Xét hàm $f(t)=t^3+t$ luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$

$$(*)\Leftrightarrow 1-\frac{1}{x}=\sqrt{3-2y}\qquad (3)$$

Thế (3) vào (2) ta được $\sqrt{x+2}=\sqrt[3]{15-x}+1\Leftrightarrow\sqrt{x+2}-3+2-\sqrt[3]{15-x}=0$

$$\Leftrightarrow(x-7)\left(\underbrace{\frac{1}{\sqrt{x+2}+3}+\frac{1}{4-2\sqrt[3]{x+15}+\left(\sqrt[3]{x+15}\right)^2}}_{>0}\right)=0$$

Vậy hệ đã cho có nghiệm $(x;y)=\left(7;\frac{111}{98}\right)$.

**Bài 25: Giải hệ phương trình:** $\begin{cases}2\sqrt{x+y+6}=1-y\\9\sqrt{1+x}+xy\sqrt{9+y^2}=0\end{cases}$.

**Lần 5 – THPT PHƯỚC BÌNH**

**Lời giải tham khảo**

Đk: $\begin{cases}x+y+6\ge 0\\x\ge -1\end{cases}$

+) Nếu $y\ge 0$, để hệ có nghiệm thì $1\ge y\ge 0$.

$\left.\begin{array}{l}VT(1)=2\sqrt{x+y+6}\ge 2\sqrt{5}\\VP(1)=1-y\le 1\end{array}\right\}\Rightarrow VT(1)>VP(1)$ hệ vô nghiệm.

+) Nếu y<0, từ (2) suy ra x>0

$$9\sqrt{1+x}+xy\sqrt{9+y^2}=0\Leftrightarrow\left(\frac{3}{\sqrt{x}}\right)\sqrt{9+\left(\frac{3}{\sqrt{x}}\right)^2}=(-y)\sqrt{9+(-y)^2}\,(3)$$

Xét hàm số $f(t)=t\sqrt{9+t^2},t>0;\ f'(t)=\dfrac{9+2t^2}{\sqrt{9+t^2}}>0\forall t>0$

$$(3)\Leftrightarrow f\left(\frac{3}{\sqrt{x}}\right)=f(-y)\Leftrightarrow\frac{3}{\sqrt{x}}=-y\Leftrightarrow x=\frac{9}{y^2}$$

Thế vào pt(1) ta có phương trình $2\sqrt{\frac{9}{y^2}+y+6}=1-y$ (4). Hàm số $g(y)=2\sqrt{\frac{9}{y^2}+y+6}$ đồng biến trên $(-\infty;0)$; hàm số *h(y)*=1-*y* nghịch biến trên $(-\infty;0)$ và phương trình có ngiệm y=-3 nên pt(4) có nghiệm duy nhất y=-3. Vậy, hệ có nghiệm duy nhất (1;-3).

**Bài 26: Giải hệ phương trình:** $\begin{cases} x+2\sqrt{x+y+4}=x^3+x^2+y+3 \\ x^2+x\sqrt{x-y+3}=2x^2+x+y+1 \end{cases}.$

**Lần 1 – THPT HÙNG VƯƠNG – BÌNH PHƯỚC**

**Lời giải tham khảo**

Điều kiện $\begin{cases} x+y+4\ge 0 \\ x-y+4\ge 0 \end{cases}$

$(2)\Leftrightarrow y=x-1$ thế $(1)$ ta được: $(x+2)\sqrt{2x+3}=x^3+x^2+x+2$

$\Leftrightarrow (x+1)^2\left(\sqrt{2x+3}-x-1\right)\left(-4\sqrt{2x+3}-2x-8\right)=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=\sqrt{2} \end{array}\right.$

Hệ có nghiệm $(x;y)=(-1;-2),\left(\sqrt{2};\sqrt{2}-1\right)$

**Bài 27: Giải bất phương trình:** $\left(x^2-x-6\right)\sqrt{x-1}+\left(x-2\right)\sqrt{x+1}\ge 3x^2-9x+2.$

**Lần 2 – THPT HÙNG VƯƠNG – BÌNH PHƯỚC**

**Lời giải tham khảo**

$\left(x^2-x-6\right)\sqrt{x-1}+\left(x-2\right)\sqrt{x+1}\ge 3x^2-9x+2$

$\Leftrightarrow \left(x^2-x-6\right)\left(\sqrt{x-1}-1\right)+\left(x-2\right)\left(\sqrt{x+1}-2\right)\ge 2x^2-10x+12$

$\Leftrightarrow \dfrac{\left(x^2-x-6\right)\left(x-2\right)}{\sqrt{x-1}+1}+\dfrac{\left(x-2\right)\left(x-3\right)}{\sqrt{x+1}+2}\ge 2x^2-10x+12$

$\Leftrightarrow \dfrac{\left(x^2-5x+6\right)\left(x+2\right)}{\sqrt{x-1}+1}+\dfrac{\left(x^2-5x+6\right)}{\sqrt{x+1}+2}\ge 2\left(x^2-5x+6\right)$

$\Leftrightarrow \left(x^2-5x+6\right)\left[\dfrac{x+2}{\sqrt{x-1}+1}+\dfrac{1}{\sqrt{x+1}+2}-2\right]\ge 0$

$\Leftrightarrow \left(x^2-5x+6\right)\left[\dfrac{\left(\sqrt{x-1}-1\right)^2}{\sqrt{x-1}+1}+\dfrac{1}{\sqrt{x+1}+2}\right]\ge 0$

$\Leftrightarrow x\in\left[1;2\right]\cup\left[3;+\infty\right)$

**Bài 28: Giải hệ phương trình:** $\begin{cases} \sqrt{y-1}+2y^2+1=\sqrt{x}+x^2+xy+3y \\ \sqrt{x^2+y}+\sqrt{3}=\sqrt{y^2-3x}+\sqrt{7} \end{cases}.$

**Lần 1 – THPT ĐỒNG XOÀI**

**Lời giải tham khảo**

Đk: $y\ge 1, x\ge 0, y^2\ge 3x$

Từ pt (2) ta có : $(y-x-1)\left(\dfrac{1}{\sqrt{y-1}+\sqrt{x}}+2y-1+x\right)=0$

Suy ra, y = x + 1

Thay vào pt (1) ta được $\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2-x+1}=\sqrt{7}-\sqrt{3}$

Xét hàm số: $f(x)=\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2-x+1}$

Chứng minh hàm số đồng biến

Ta có nghiệm duy nhất x = 2

Vậy nghiệm của hệ là (2;3)

**Bài 29: Giải hệ phương trình:** $\begin{cases} x^2+y^2+\dfrac{2xy}{x+y}=1 \\ \sqrt{x+y}=x^2-y \end{cases}$.

**Lần 2 – THPT ĐỒNG XOÀI**

**Lời giải tham khảo**

Điều kiện: $x+y>0$.

(1) $\Leftrightarrow (x+y)^2-1-2xy\left(1-\dfrac{1}{x+y}\right)=0 \Leftrightarrow (x+y-1)(x^2+y^2+x+y)=0$

$\Leftrightarrow x+y-1=0$ (vì $x+y>0$ nên $x^2+y^2+x+y>0$)

Thay $x=1-y$ vào (2) ta được: $1=x^2-(1-x) \Leftrightarrow x^2+x-2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x=1 & \Rightarrow y=0 \\ x=-2 & \Rightarrow y=3 \end{array}\right.$

Vậy hệ có 2 nghiệm: (x;y) = (1; 0), (x;y) = (–2; 3)

**Bài 30: Giải hệ phương trình:** $\begin{cases} \sqrt{x+2y+1}-\sqrt{5-x}+2x^2-8x+2y-6=0 \\ x^3-2xy\ \ y+1\ \ +5x-10y=4y^2(y-1) \end{cases}$.

**Lần 3 – THPT ĐỒNG XOÀI**

**Lời giải tham khảo**

+ Điều kiện: $\begin{cases} x+2y+1\ge 0 \\ 5-x\ge 0 \end{cases}$

+Ta có hệ $\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x+2y+1}-\sqrt{5-x}+2x^2-8x+2y-6=0 \\ x-2y\ \ x^2+2xy+2y^2-2y+5\ \ =0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x+2y+1}-\sqrt{5-x}+2x^2-8x+2y-6=0 \\ \left[\begin{array}{l} x-2y=0 \\ x^2+2xy+2y^2-2y+5=0 \end{array}\right. \end{cases}$

Dễ thấy $x^2+2xy+2y^2-2y+5=0 \Leftrightarrow\ x^2+2xy+y^2\ +\ y^2-2y+1\ +4=0$

$\Leftrightarrow\ x+y\ ^2+\ y-1\ ^2+4=0$: vô nghiệm với $\forall x,y\in R$.

Do đó hệ $\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x+2y+1}-\sqrt{5-x}+2x^2-8x+2y-6=0 \\ x=2y \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{2x+1}-\sqrt{5-x}+2x^2-7x-6=0\ \ (*) \\ x=2y \end{cases}$

Giải phương trình: $\sqrt{2x+1}-\sqrt{5-x}+2x^2-7x-7=0\ \ (*)$

+) Điều kiện: $-\dfrac{1}{2}\le x\le 5$

+) Phương trình $\Leftrightarrow \sqrt{2x+1}-3+1-\sqrt{5-x}+2x^2-7x-4=0$

$$\Leftrightarrow \frac{2x-8}{\sqrt{2x+1}+3}+\frac{x-4}{1+\sqrt{5-x}}+(x-4)(2x+1)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-4=0 \\ \dfrac{2}{\sqrt{2x+1}+3}+\dfrac{1}{1+\sqrt{5-x}}+(2x+1)=0 \end{array}\right.$$

Dễ thấy $\dfrac{2}{\sqrt{2x+1}+3}+\dfrac{1}{1+\sqrt{5-x}}+(2x+1)>0$ nên $x=4 \Rightarrow y=2$

Vậy hệ có nghiệm $x;y = 4;2$ .

**Bài 31: Giải hệ phương trình:** $\begin{cases} x\left(x^2-y^2\right)+x^2=2\sqrt{\left(x-y^2\right)^3} \\ \sqrt{x+\dfrac{y^2+1}{x}}=\dfrac{\sqrt[3]{x^3+2\left(x-y^2\right)}+x^2+y^2+2}{2x+1} \end{cases}\left(x,y\in\mathbb{R}\right).$

**Lần 2 – THPT CHUYÊN QUANG TRUNG**

**Lời giải tham khảo**

ĐK: $x\geq y^2\geq 0$

Từ PT(1) tìm được $x=\sqrt{x-y^2} \Rightarrow x^2=x-y^2$

Thế vào (2) đưa về pt chỉ có ẩn x

Đưa được về hàm $\left(\sqrt{1+\dfrac{1}{x}}\right)^3+\sqrt{1+\dfrac{1}{x}}=1+\dfrac{2}{x}+\sqrt[3]{1+\dfrac{2}{x}}$

Xét hàm $f(t)=t^3+t$ đồng biến trên ⌒ từ đó được pt $\sqrt{1+\dfrac{1}{x}}=\sqrt[3]{1+\dfrac{2}{x}}$ giải được

$x=-\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}\ (L),\ x=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\ (N)$

Nghiệm $\left(\dfrac{\sqrt{5}-1}{2};\pm\sqrt{\sqrt{5}-2}\right)$

**Bài 32: Giải hệ phương trình:** $\begin{cases} \sqrt{x+y}-\sqrt{x-y}=2 \\ \sqrt{x^2+y^2+1}=3+\sqrt{x^2-y^2} \end{cases}.$

**Lần 1 – THPT NGUYỄN HỮU CẢNH**

**Lời giải tham khảo**

Điều kiện: $x+y\geq 0,\ x-y\geq 0$

Đặt: $\begin{cases} u=x+y \\ v=x-y \end{cases}$ ta có hệ: $\begin{cases} \sqrt{u}-\sqrt{v}=2\ (u>v) \\ \sqrt{\dfrac{u^2+v^2+2}{2}}-\sqrt{uv}=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u+v=2\sqrt{uv}+4 \\ \sqrt{\dfrac{u^2+v^2+2}{2}}-\sqrt{uv}=3 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} u+v=2\sqrt{uv}+4 & (1) \\ \sqrt{\dfrac{(u+v)^2-2uv+2}{2}}-\sqrt{uv}=3\ (2) \end{cases}$. Thế (1) vào (2) ta có:

$\sqrt{uv+8\sqrt{uv}+9}-\sqrt{uv}=3 \Leftrightarrow uv+8\sqrt{uv}+9=(3+\sqrt{uv})^2 \Leftrightarrow uv=0$.

Kết hợp (1) ta có: $\begin{cases} uv=0 \\ u+v=4 \end{cases} \Leftrightarrow u=4, v=0$ (vì $u>v$).

Từ đó ta có: $x$ =2; $y$ =2.(Thỏa đ/k)

KL: Vậy nghiệm của hệ là: $(x; y)$=(2; 2)..

**Bài 33: Giải hệ phương trình:** $\begin{cases} (x-y)(x^2+xy+y^2+3)=3(x^2+y^2)+2 \\ 4\sqrt{x+2}+\sqrt{16-3y}=x^2+8 \end{cases}$.

**Lần 2 – THPT NGUYỄN HỮU CẢNH**

**Lời giải tham khảo**

ĐK: $x \geq -2, y \leq \frac{16}{3}$

(1) $\Leftrightarrow (x-1)^3=(y+1)^3 \Leftrightarrow y=x-2$ Thay $y$=$x$-2 vao (2) được

$$4\sqrt{x+2}+\sqrt{22-3x}=x^2+8 \Leftrightarrow \frac{4(x-2)}{\sqrt{x+2}+2}=(x-2)(x+2)+\frac{3(x-2)}{\sqrt{22-3x}+4}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ \frac{-4}{\sqrt{x+2}+2}+(x+2)+\frac{3}{\sqrt{22-3x}+4}=0(*) \end{array}\right.$$

Xét $f(x)$=VT(*) trên [-2;21/3],có $f'(x)$>0 nên hàm số đồng biến. suy ra $x$=-1 là nghiệm duy nhất của (*)

KL: HPT có 2 nghiệm (2;0),(-1;-3)

**Bài 34: Giải hệ phương trình:** $\begin{cases} \sqrt{x}+\sqrt{x+2}+\sqrt{x+4}=\sqrt{y-1}+\sqrt{y-3}+\sqrt{y-5} \\ x+y+x^2+y^2=44 \end{cases}$.

**Lần 3– THPT NGUYỄN HỮU CẢNH**

**Lời giải tham khảo**

Xéthàm số $f(t)=\sqrt{t}+\sqrt{t+2}+\sqrt{t+4}$ trên $[0;+\infty)$, có

$$f'(t)=\frac{1}{2\sqrt{t}}+\frac{1}{2\sqrt{t+2}}+\frac{1}{2\sqrt{t+4}}>0, \forall t \in (0;+\infty)$$

Nên (1) $\Leftrightarrow \sqrt{x}+\sqrt{x+2}+\sqrt{x+4}=\sqrt{(y-5)+4}+\sqrt{(y-5)+2}+\sqrt{y-5} \Leftrightarrow x=y-5$ (*)

Thay (*) vào (2): $\sqrt{y+3}-\sqrt{y-2}=1$ (3)

Nhân (3) với lượng liên hợp: $5=\sqrt{y+3}+\sqrt{y-2}$ (4)

(3), (4) $\Rightarrow \sqrt{y+3}=3 \Leftrightarrow y=6$

ĐS: $(1; 6)$

**Bài 35: Giải hệ phương trình:** $\begin{cases} x\sqrt{x^2+y}+y=\sqrt{x^4+x^3}+x \\ x+\sqrt{y}+\sqrt{x-1}+\sqrt{y(y-1)}=\frac{9}{2} \end{cases}$.

**Lần 1– THPT HÀ HUY TẬP**

**Lời giải tham khảo**

Đk: $x \geq 1; y \geq 0$

$pt(1) \Leftrightarrow x\sqrt{x^2+y}+y = x\sqrt{x^2+x}+x \Leftrightarrow x\left(\sqrt{x^2+y}-\sqrt{x^2+x}\right) = x-y$

$\Leftrightarrow (y-x)\left(\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y}+\sqrt{x^2+x}}+1\right) = 0$ ◎

Lập luận $\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y}+\sqrt{x^2+x}}+1>0$ với $x \ge 1;\ y \ge 0$

Với $x = y$ thay vào pt(2): $x+\sqrt{x}+\sqrt{x-1}+\sqrt{x(x-1)} = \dfrac{9}{2}$

$\Leftrightarrow \left(\sqrt{x}+\sqrt{x-1}\right)^2+2\left(\sqrt{x}+\sqrt{x-1}\right)-8=0$ **(2′)**◎Giải pt(2′) được: $x = \dfrac{25}{6} \Rightarrow y = \dfrac{25}{6}$

Giải pt(2′) được: $x = \dfrac{25}{6} \Rightarrow y = \dfrac{25}{6}$

Vậy hpt có nghiệm $\left(\dfrac{25}{6};\dfrac{25}{6}\right)$

**Bài 36: Giải hệ phương trình:** $\begin{cases} x^2+\dfrac{x}{x+1} = (y+2)\sqrt{(x+1)(y+1)} \\ 3x^2-8x-3 = 4(x+1)\sqrt{y+1} \end{cases}$ $(x, y \in R)$.

**Lần 2 – THPT HÀ HUY TẬP**

**Lời giải tham khảo**

Điều kiện: $\begin{cases} x > -1 \\ y \ge -1 \end{cases}$

$(1) \Leftrightarrow \dfrac{x^3+x^2+x}{x+1} = (y+2)\sqrt{(x+1)(y+1)} \Leftrightarrow \dfrac{x^3+x(x+1)}{(x+1)\sqrt{x+1}} = (y+2)\sqrt{y+1}$

$\Leftrightarrow \left(\dfrac{x}{\sqrt{x+1}}\right)^3+\dfrac{x}{\sqrt{x+1}} = \left(\sqrt{y+1}\right)^3+\sqrt{y+1}$.

◎Xét hàm số $f(t) = t^3+t$ trên R có $f'(t) = 3t^2+1>0 \forall t \in R$ suy ra *f(t)* đồng biến trên R. Nên

$f\left(\dfrac{x}{\sqrt{x+1}}\right) = f\left(\sqrt{y+1}\right) \Leftrightarrow \dfrac{x}{\sqrt{x+1}} = \sqrt{y+1}$. Thay vào (2) ta được $3x^2-8x-3 = 4x\sqrt{x+1}$.

Xét hàm số $f(t) = t^3+t$ trên R có $f'(t) = 3t^2+1>0 \forall t \in R$ suy ra *f(t)* đồng biến trên R. Nên

$f\left(\dfrac{x}{\sqrt{x+1}}\right) = f\left(\sqrt{y+1}\right) \Leftrightarrow \dfrac{x}{\sqrt{x+1}} = \sqrt{y+1}$. Thay vào (2) ta được $3x^2-8x-3 = 4x\sqrt{x+1}$.

$$\Leftrightarrow (2x-1)^2 = \left(x+2\sqrt{x+1}\right)^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2\sqrt{x+1} = x-1 \\ 2\sqrt{x+1} = 1-3x \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \ge 1 \\ x^2-6x-3=0 \end{cases} \\ \begin{cases} x \le \dfrac{1}{3} \\ 9x^2-10x-3=0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 3+2\sqrt{3} \\ x = \dfrac{5-2\sqrt{13}}{9} \end{array}\right.$$

Ta có $y = \dfrac{x^2}{x+1}-1$

Với $x=3+2\sqrt{3}\Rightarrow y=\dfrac{4+3\sqrt{3}}{2}$. Với $x=\dfrac{5-2\sqrt{13}}{9}\Rightarrow y=-\dfrac{41+7\sqrt{13}}{72}$.

Các nghiệm này đều thỏa mãn điều kiện .

KL: Hệ phương trình có hai nghiệm $(x;y)=\left(3+2\sqrt{3};\dfrac{4+3\sqrt{3}}{2}\right)$

& $(x;y)=\left(\dfrac{5-2\sqrt{13}}{9};-\dfrac{41+7\sqrt{13}}{72}\right)$.

**Bài 37: Giải bất phương trình:** $1+x\sqrt{x^2+1}>\sqrt{x^2-x+1}(1+\sqrt{x^2-x+2})$.

**Lần 2 – THPT ANH SƠN 2**

**Lời giải tham khảo**

Bất phương trình đã cho tương đương

$(x\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-x+1}\sqrt{x^2-x+2})+(1-\sqrt{x^2-x+1})>0$

$\Leftrightarrow \dfrac{(x-1)(2x^2-x+2)}{x\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-x+1}\sqrt{x^2-x+2}}+\dfrac{x(1-x)}{1+\sqrt{x^2-x+1}}>0$

$\Leftrightarrow (x-1)\left(\dfrac{2x^2-x+2}{x\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-x+1}\sqrt{x^2-x+2}}-\dfrac{x}{1+\sqrt{x^2-x+1}}\right)>0$

$\Leftrightarrow (x-1).A>0$ (1) với $A=\dfrac{2x^2-x+2}{x\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-x+1}\sqrt{x^2-x+2}}-\dfrac{x}{1+\sqrt{x^2-x+1}}$

Nếu $x\le 0$ thì $\begin{cases}\sqrt{x^2-x+1}\ge\sqrt{x^2+1}\\ \sqrt{x^2-x+2}>-x\end{cases}\Rightarrow \sqrt{x^2-x+1}\sqrt{x^2-x+2}\ge -x\sqrt{x^2+1}$

$\Rightarrow \sqrt{x^2-x+1}\sqrt{x^2-x+2}+x\sqrt{x^2+1}>0\Rightarrow A>0$

Nếu x>0 , áp dụng bất đẳng thức AM-GM ta có:

$\begin{cases}\sqrt{x^2-x+1}\sqrt{x^2-x+2}\le\dfrac{x^2-x+1+x^2-x+2}{2}=x^2-x+\dfrac{3}{2}\\ x\sqrt{x^2+1}\le\dfrac{x^2+x^2+1}{2}=x^2+\dfrac{1}{2}\end{cases}$

$\Rightarrow \sqrt{x^2-x+1}\sqrt{x^2-x+2}+x\sqrt{x^2+1}\le 2x^2-x+2$

$\Rightarrow A\ge 1-\dfrac{x}{1+\sqrt{x^2-x+1}}>0$ vì $\dfrac{x}{1+\sqrt{x^2-x+1}}<1$

Tóm lại , với mọi $x\in\mathbb{R}$ ta có A>0. Do đó (1) tương đương $x-1>0\Leftrightarrow x>1$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình đã cho là $(1;+\infty)$.

**Chú ý : Cách 2. Phương pháp hàm số**

Đặt $u=\sqrt{x^2-x+1}\Rightarrow u^2=x^2-x+1$ thế vào bpt đã cho ta có

$u^2-x^2+x+x\sqrt{x^2+1}>u(1+\sqrt{u^2+1})$

$\Leftrightarrow u^2-u-u\sqrt{u^2+1}>x^2-x-x\sqrt{x^2+1}$

Xét $f(t)=t^2-t-t\sqrt{t^2+1})$

$f'(t)=-(t-\sqrt{t^2+1})^2-\sqrt{t^2+1}<0\forall t$ nên hàm nghịch biến trên R

Do đó $bpt\Leftrightarrow u<x\Leftrightarrow x>1$

**Bài 38: Giải hệ phương trình:** $\begin{cases} 2x^2 - y^2 - 2(x+1)\sqrt{x^2+2x+3} = 4x+2y+1 \\ xy+2 = (y+1)\sqrt{x^2+2} - x \end{cases} (x, y \in \mathbb{R})$.

**Lần 1 – THPT THỰC HÀNH CAO NGUYÊN**

**Lời giải tham khảo**

Từ phương trình thứ hai của hệ ta có: $y+1 = \sqrt{x^2+2} + x$

Thay vào phương trình thứ nhất ta được: $(x+1)\left[1+\sqrt{(x+1)^2+2}\right] = -x\left[1+\sqrt{(-x)^2+2}\right]$

$f(t) = t\left[1+\sqrt{t^2+2}\right] \to f'(t) = 1+\sqrt{t^2+2} + \dfrac{t^2}{\sqrt{t^2+2}} > 0, \forall t$

Cho ta $x+1 = -x \Leftrightarrow x = -\dfrac{1}{2} \Rightarrow y = 0$. Nghiệm của hệ : $(x;y) = \left(-\dfrac{1}{2};0\right)$

**Bài 39: Giải bất phương trình:** $(5x^2-5x+10)\sqrt{x+7} + (2x+6)\sqrt{x+2} \geq x^3+13x^2-6x+32$.

**Lần 1 – THPT ĐOÀN THỊ ĐIỂM**

**Lời giải tham khảo**

Điều kiện $x \geq -2$. Bất phương trình đã cho tương đương với bất phương trình

$(5x^2-5x+10)\left(\sqrt{x+7}-3\right) + (2x+6)\left(\sqrt{x+2}-2\right) + 3(5x^2-5x+10) + 2(2x+6)$

$\geq x^3+13x^2-6x+32$

$\Leftrightarrow (5x^2-5x+10)\left(\sqrt{x+7}-3\right) + (2x+6)\left(\sqrt{x+2}-2\right) - x^3+2x^2-5x+10 \geq 0$

$\Leftrightarrow (x-2)\left(\dfrac{5x^2-5x+10}{\sqrt{x+7}+3} + \dfrac{2x+6}{\sqrt{x+2}+2} - x^2 - 5\right) \geq 0$

Do $x \geq -2 \Rightarrow \sqrt{x+2}+2 \geq 2 \Rightarrow \dfrac{1}{\sqrt{x+2}+2} \leq \dfrac{1}{2}$ và vì $2x+6 > 0 \Rightarrow \dfrac{2x+6}{\sqrt{x+2}+2} \leq \dfrac{2x+6}{2} = x+3$ (1)

Do $x \geq -2 \Rightarrow$ $\sqrt{x+7}+3 \geq \sqrt{5}+3 > 5 \Rightarrow \dfrac{1}{\sqrt{x+7}+3} < \dfrac{1}{5}$ và vì $5x^2-5x+10 > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow \dfrac{5x^2-5x+10}{\sqrt{x+7}+3} < \dfrac{5x^2-5x+10}{5} = x^2-x+2 \Rightarrow \dfrac{5x^2-5x+10}{\sqrt{x+7}+3} - x^2 - 5 < -x-3 (2)$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \dfrac{5x^2-5x+10}{\sqrt{x+7}+3} + \dfrac{2x+6}{\sqrt{x+2}+2} - x^2 - 5 < 0$. Do đó (*) $\Leftrightarrow x-2 \leq 0 \Leftrightarrow x \leq 2$

Kết hợp điều kiện $x \geq -2 \Rightarrow -2 \leq x \leq 2$.

**Bài 40: Giải hệ phương trình:** $\begin{cases} x(y-1)(x+1) = x^3+y^2+x-3y+2 \\ \sqrt{x+2} + \sqrt{y+4} - \sqrt{x^2-2x+4} = y-2 \end{cases}$.

**Lần 1 – THPT ĐOÀN THƯỢNG**

**Lời giải tham khảo**

ĐKXĐ $x \geq -2, y \geq -4$. (1) $\Leftrightarrow y^2 - (x^2+x+3)y + x^3+x^2+2x+2 = 0$

Giải pt bậc 2 ta được $y = x+1$ hoặc $y = x^2+2$ ◎Với $y = x+1$ thay vào PT (2) ta được $\sqrt{x+2} + \sqrt{x+5} - \sqrt{x^2-2x+4} = x-1$

Với $y = x+1$ thay vào PT (2) ta được $\sqrt{x+2} + \sqrt{x+5} - \sqrt{x^2-2x+4} = x-1$

$\Leftrightarrow \sqrt{x+2}+\sqrt{\left(\sqrt{x+2}\right)^2+3}=x-1+\sqrt{(x-1)^2+3}$ ⊚Xét hàm số $f(t)=t+\sqrt{t^2+3}$ có $f'(t)=1+\dfrac{t}{\sqrt{t^2+3}}>0,\forall t\in\mathbb{R}\Rightarrow f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Xét hàm số $f(t)=t+\sqrt{t^2+3}$ có $f'(t)=1+\dfrac{t}{\sqrt{t^2+3}}>0,\forall t\in\mathbb{R}\Rightarrow f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Vậy $f\left(\sqrt{x+2}\right)=f(x-1)\Leftrightarrow \sqrt{x+2}=x-1\Leftrightarrow \begin{cases} x-1\ge 0\\ x+2=(x-1)^2\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 1\\ x=\dfrac{3\pm\sqrt{13}}{2}\end{cases}$

$\Leftrightarrow x=\dfrac{3+\sqrt{13}}{2}\Rightarrow y=\dfrac{5+\sqrt{13}}{2}$ ⊚Với $y=x^2+2$ thay vào PT (2) ta được

Với $y=x^2+2$ thay vào PT (2) ta được

$\sqrt{x+2}+\sqrt{x^2+6}-\sqrt{x^2-2x+4}=x^2\Leftrightarrow\left(\sqrt{x+2}-1\right)+\left(\sqrt{x^2+6}-\sqrt{x^2-2x+4}\right)=x^2-1$

$\Leftrightarrow \dfrac{x+1}{\sqrt{x+2}+1}+\dfrac{2x+2}{\sqrt{x^2+6}+\sqrt{x^2-2x+4}}=(x+1)(x-1)$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x+1=0\\ \dfrac{1}{\sqrt{x+2}+1}+\dfrac{2}{\sqrt{x^2+6}+\sqrt{x^2-2x+4}}=x-1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x=-1\Rightarrow y=3\\ x=\dfrac{7}{4}\Rightarrow y=\dfrac{81}{16}\end{array}\right.$

Vậy hệ có 3 nghiệm là $\left(\dfrac{3+\sqrt{13}}{2};\dfrac{5+\sqrt{13}}{2}\right),(-1;3),\left(\dfrac{7}{4};\dfrac{81}{16}\right)$

**Bài 41: Giải hệ phương trình:** $\begin{cases}(4-y)\sqrt{x-2}+\sqrt{7-2y}=\sqrt{85-50x-7y+13y^2-x^3}\\ \sqrt{2x^2+3xy+4y^2}+\sqrt{4x^2+3xy+2y^2}=3(x+y)\end{cases}$.

**Lần 2 – THPT ĐOÀN THƯỢNG**

**Lời giải tham khảo**

- Ta có $2x^2+3xy+4y^2=(\frac{7}{6}x+\frac{11}{6}y)^2+\frac{23}{36}(x-y)^2\ge(\frac{7}{6}x+\frac{11}{6}y)^2$.
- Nên $\sqrt{2x^2+3xy+4y^2}\ge\sqrt{(\frac{7}{6}x+\frac{11}{6}y)^2}=\left|\frac{7}{6}x+\frac{11}{6}y\right|\ge\frac{7}{6}x+\frac{11}{6}y$.
- Tương tự $\sqrt{4x^2+3xy+2y^2}\ge\sqrt{(\frac{11}{6}x+\frac{7}{6}y)^2}=\left|\frac{11}{6}x+\frac{7}{6}y\right|\ge\frac{11}{6}x+\frac{7}{6}y$
- Cộng lại ta được : $\sqrt{2x^2+3xy+4y^2}+\sqrt{4x^2+3xy+2y^2}\ge 3(x+y)$ dấu bằng xảy ra khi $x=y\ge 0$.

***Chú ý*** *: Cách tìm các hệ số* $\frac{7}{6};\frac{11}{6};\frac{23}{36}$ *trên như sau :*

*Do tính đối xứng nên giả sử :* $\begin{cases}2x^2+3xy+4y^2=(ax+by)^2+c.(x-y)^2\\ 4x^2+3xy+2y^2=(bx+ay)^2+c.(x-y)^2\end{cases}$

*Khai triển và đồng nhất hệ số ta có hệ số của x là* $\begin{cases} a^2+c=2 \\ b^2+c=4 \\ a+b=3 \quad do\ VP=3(x+y) \end{cases}$

*Trừ từng vế (1) cho (2) và kết hợp với (3), ta được* $a=\frac{7}{6};\ b=\frac{11}{6};\ c=\frac{23}{36}$. ◎ *PT* $(1)\Leftrightarrow(4-x)\sqrt{x-2}+\sqrt{7-2x}=\sqrt{85-57x+13x^2-x^3}$

- *PT* $(1)\Leftrightarrow(4-x)\sqrt{x-2}+\sqrt{7-2x}=\sqrt{85-57x+13x^2-x^3}$

  $\Leftrightarrow(4-x)\sqrt{x-2}+\sqrt{7-2x}=\sqrt{(5-x)\left[(x-4)^2+1\right]}$ ◎Áp dụng bất đẳng thức bunhia copki ta có :
- Áp dụng bất đẳng thức bunhia copki ta có :

  $VT^2\le\left[(4-x)^2+1^2\right].\left[(x-2)+(7-2x)\right]=\left[(4-x)^2+1^2\right].(5-x)$

  $\Leftrightarrow(4-x)\sqrt{x-2}+\sqrt{7-2x}\le\sqrt{(5-x)\left[(x-4)^2+1\right]}$ ◎Dấu bằng xảy ra khi

  $\Leftrightarrow\frac{4-x}{\sqrt{x-2}}=\frac{1}{\sqrt{7-2x}}\Leftrightarrow x=3$, nghiệm $(x;y)=(3;3)$
- Dấu bằng xảy ra khi $\Leftrightarrow\frac{4-x}{\sqrt{x-2}}=\frac{1}{\sqrt{7-2x}}\Leftrightarrow x=3$, nghiệm $(x;y)=(3;3)$
-

**Bài 42: Giải phương trình:** $3(2+\sqrt{x-2})=2x+\sqrt{x+6}$.

**Lần 1 – THPT ĐÔNG DU**

**Lời giải tham khảo**

ĐK: $x\ge2$

$3(2+\sqrt{x-2})=2x+\sqrt{x+6}\Leftrightarrow2(x-3)+\sqrt{x+6}-3\sqrt{x-2}=0$

$\Leftrightarrow2(x-3)-\frac{8(x-3)}{\sqrt{x+6}+3\sqrt{x-2}}=0$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x=3 \\ 2-\frac{8}{\sqrt{x+6}+3\sqrt{x-2}}=0 \end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x=3 \\ \sqrt{x+6}+3\sqrt{x-2}=4 \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x=3 \\ x=\frac{11-3\sqrt{5}}{2} \end{array}\right.$

Vậy pt có tập nghiệm $S=\{3\}$

**Bài 43: Giải bất phương trình:** $\sqrt{2x+7}-\sqrt{5-x}\ge\sqrt{3x-2}$.

**Lần 2 – THPT ĐÔNG DU**

**Lời giải tham khảo**

+ ĐK: $\frac{2}{3}\le x\le5$. Biến đổi PT về dạng

$$\sqrt{2x+7}\ge\sqrt{3x-2}+\sqrt{5-x}$$

+ Bình phương hai vế, đưa về được $3x^2-17x+14\ge0$

+ Giải ra được $x \le 1$ hoặc $x \ge \frac{14}{3}$

+ Kết hợp với điều kiện, nhận được $\frac{2}{3} \le x \le 1$ hoặc $\frac{14}{3} \le x \le 5$

**Bài 44: Giải hệ phương trình:** $\begin{cases} x^3 - y^3 + 3y^2 + x - 4y + 2 = 0 \\ x^3 + x - 3 = 2\sqrt{x+2} + y \end{cases}$ $(x, y \in \mathbb{R})$.

**Lần 3 – THPT ĐÔNG DU**

**Lời giải tham khảo**

Điều kiện: $x \ge -2$.

(1) $\Leftrightarrow x^3 + x + 2 = y^3 - 3y^2 + 4y \Leftrightarrow x^3 + x + 2 = (y-1)^3 + (y-1) + 2$ .◎Xét hàm số $f(t) = t^3 + t + 2$ trên $[-2; +\infty)$.

Xét hàm số $f(t) = t^3 + t + 2$ trên $[-2; +\infty)$.

Ta có: $f'(t) = 3t^2 + 1 > 0, \forall t \in [-2; +\infty)$.

Mà $f(t)$ liên tục trên $[-2; +\infty)$, suy ra hàm số $f(t)$ đồng biến trên $[-2; +\infty)$.

Do đó: $x = y - 1$.◎Thay $y = x + 1$ và phương trình (2) ta được: $x^3 - 3 = 2\sqrt{x+2} + 1$

Thay $y = x + 1$ và phương trình (2) ta được: $x^3 - 3 = 2\sqrt{x+2} + 1$

$$\Leftrightarrow x^3 - 8 = 2\left(\sqrt{x+2} - 2\right) \Leftrightarrow (x-2)\left(x^2 + 2x + 4\right) = \frac{2\left(\sqrt{x+2} - 2\right)\left(\sqrt{x+2} + 2\right)}{\left(\sqrt{x+2} + 2\right)}$$

$$\Leftrightarrow (x-2)\left(x^2 + 2x + 4\right) = \frac{2(x-2)}{\left(\sqrt{x+2} + 2\right)} \Leftrightarrow (x-2)\left[x^2 + 2x + 4 - \frac{2}{\left(\sqrt{x+2} + 2\right)}\right] = 0$$

- $x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2 \Rightarrow y = 3$
- $x^2 + 2x + 4 - \frac{2}{\left(\sqrt{x+2} + 2\right)} = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2x + 4 = \frac{2}{\left(\sqrt{x+2} + 2\right)}$ (*)

Ta có $VT = x^2 + 2x + 4 = (x+1)^2 + 3 \ge 3; VP = \frac{2}{\sqrt{x+2} + 2} \le 1, \forall x \in [-2; +\infty)$

Do đó phương trình (*) vô nghiệm.

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $(x; y) = (2; 3)$.

**Bài 45: Giải bất phương trình:** $\sqrt{x}(x+1) \ge x^3 - 5x^2 + 8x - 6$ $(x \in R)$..

**Lần 1 – THPT ĐỒNG GIA**

**Lời giải tham khảo**

Điều kiện: x $\ge$ 0.

(1) $\Leftrightarrow x\sqrt{x} + x \ge (x^3 - 6x^2 + 12x - 8) + (x^2 - 4x + 4) - 2$

$\Leftrightarrow (\sqrt{x})^3 + x + \sqrt{x} \ge (x-2)^3 + (x-2)^2 + (x-2)$ (2)◎ Xét hàm số f(t) = $t^3 + t^2 + t$, có f′(t) = $3t^2 + 2t + 1 > 0$, $\forall t$.

Xét hàm số f(t) = $t^3 + t^2 + t$, có f′(t) = $3t^2 + 2t + 1 > 0$, $\forall t$.

Do đó hàm số y = f(t) đồng biến trên R, mặt khác (2) có dạng

$f\left(\sqrt{x}\right) \ge f(x-2) \Leftrightarrow \sqrt{x} \ge x - 2$ (3). ◎+) Với $0 \le x \le 2$ là nghiệm của (3).

+) Với $0 \le x \le 2$ là nghiệm của (3).

+) Với x > 2, bình phương hai vế (3) ta được $x^2 - 5x + 4 \le 0 \Leftrightarrow 1 \le x \le 4$

Kết hợp nghiệm ta được 2 < x ≤ 4 là nghiệm của (3).

Vậy nghiệm của (3) là $0 \le x \le 4$, cũng là nghiệm của bất phương trình (1).

**Bài 46: Giải hệ phương trình:** $\begin{cases} x^2 + xy + 2y = 2y^2 + 2x \ (1) \\ y\sqrt{x - y + 1} + x = 2. \quad (2) \end{cases}$.

**Lần 2 – THPT ĐỒNG XOÀI**

**Lời giải tham khảo**

ĐK: $x - y + 1 \ge 0$.

$(1) \Leftrightarrow x^2 - y^2 + xy - y^2 + 2y - 2x = 0 \Leftrightarrow (x - y)(x + 2y - 2) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x = y & (3) \\ x = 2 - 2y & (4) \end{array}\right.$

- Từ (3) & (2) ta có *x*=*y*=1.
- Từ (4) & (2) ta có $\begin{cases} x = 2 - 2y \\ y\sqrt{3 - 3y} = 2y \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = 0; x = 2 \\ y = -\dfrac{1}{3}; x = \dfrac{8}{3} \end{array}\right.$.

Vậy hệ phương trình đã cho có 3 nghiệm $(x;y) = (1;1)$; $(x;y) = (2;0)$; $(x;y) = \left(\dfrac{8}{3}; -\dfrac{1}{3}\right)$.

**Bài 47: Giải hệ phương trình:** $\begin{cases} x^2 + xy - 2y^2 + 3y - 1 = \sqrt{y - 1} - \sqrt{x} \\ 3\left(\sqrt{6 - y} + \sqrt{2x + 3y - 7}\right) = 2x + 7 \end{cases}$.

**Lần 1 – THPT ĐỒNG ĐẬU**

**Lời giải tham khảo**

Điều kiện $\begin{cases} x \ge 0 \\ 1 \le y \le 6 \\ 2x + 3y - 7 \ge 0 \end{cases}$.

Với điều kiện trên ta có :

$$(1) \Leftrightarrow \frac{y - 1 - x}{\sqrt{y - 1} + \sqrt{x}} + (y - 1 - x)(y - 1 + x) + y(y - 1 - x) = 0$$

$$\Leftrightarrow (y - 1 - x)\left(\frac{1}{\sqrt{y - 1} + \sqrt{x}} + y - 1 + x + y\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = x + 1 \\ \dfrac{1}{\sqrt{y - 1} + \sqrt{x}} + y - 1 + x + y = 0 \ (*) \end{array}\right.$$

+ Với $\begin{cases} x \ge 0 \\ 1 \le y \le 6 \end{cases}$, suy ra phương trình (*) vô nghiệm

+ Với $y = x + 1$ thay vào (2) ta được $3\sqrt{5 - x} + 3\sqrt{5x - 4} = 2x + 7$ (3)

Điều kiện $\dfrac{4}{5} \le x \le 5$ *ta có* :

$$(3) \Leftrightarrow 7-x-3\sqrt{5-x}+3(x-\sqrt{5x-4})=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(7-x)^2-9(5-x)}{7-x+3\sqrt{5-x}}+\frac{3(x^2-5x+4)}{x+\sqrt{5x-4}}=0$$

$$\Leftrightarrow (x^2-5x+4)\left(\frac{1}{7-x+3\sqrt{5-x}}+\frac{3}{x+\sqrt{5x-4}}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-5x+4=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=4 \end{array}\right. \\ \dfrac{1}{7-x+3\sqrt{5-x}}+\dfrac{3}{x+\sqrt{5x-4}}=0 (VN) \end{array}\right.$$

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm là $(x;y)=(1;2)$ và $(x;y)=(4;5)$

**Bài 48: Giải hệ phương trình:** $\begin{cases} 2x^3+xy^2+x=2y^3+4x^2y+2y & (1) \\ \sqrt{4x^2+x+6}-5\sqrt{1+2y}=1-4y & (2) \end{cases}$.

**Lần 1 – THPT ĐỨC THỌ**

**Lời giải tham khảo**

(1) $\Leftrightarrow (x-2y)(2x^2+y^2+1)=0 \Leftrightarrow x=2y$. Thay vào (2) ta có phương trình

$\sqrt{4x^2+x+6}+2x=1+5\sqrt{x+1}$ (3)

$$\Leftrightarrow \sqrt{4x^2+x+6}-(1-2x)=5\sqrt{x+1} \Leftrightarrow \frac{x+1}{\sqrt{4x^2+x+6}+1-2x}=\sqrt{x+1}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+1=0 \Rightarrow x=-1 \\ \sqrt{4x^2+x+6}+1-2x=\sqrt{x+1} \quad (4) \end{array}\right.$$

Kết hợp (3) và (4) ta được $2\sqrt{x+1}=2x-1 \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge \dfrac{1}{2} \\ 4x^2-8x+3=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=\dfrac{2+\sqrt{7}}{2}$

Kết luận: Phương trình đã cho có 2 nghiệm: $x=-1;\ x=\dfrac{2+\sqrt{7}}{2}$

**Bài 49: Giải hệ phương trình:** $\begin{cases} x^3-2y+1=0 & (1) \\ (3-x)\sqrt{2-x}-2y\sqrt{2y-1}=0 & (2) \end{cases}$.

**Lần 1 – THPT CAM LÂM**

**Lời giải tham khảo**

Điều kiện $x\le 2$ va $y\ge \dfrac{1}{2}$

$$(2) \Leftrightarrow [1+(2-x)]\sqrt{2-x}=[1+(2y-1)]\sqrt{2y-1}$$

Xét hàm số $f(t)=(1+t^2)t=t^3+t$

$f'(t)=3t^2+1>0 \quad \forall t\in R$. Vậy hàm số tăng trên R

$$(2) \Leftrightarrow f\left(\sqrt{2-x}\right)=f\left(\sqrt{2y-1}\right) \Leftrightarrow \sqrt{2-x}=\sqrt{2y-1} \Leftrightarrow 2-x=2y-1$$

$\Leftrightarrow 2y=3-x$

Thay vào (1): $x^3+x-2=0 \Leftrightarrow x=1$. Nghiệm của hệ (1;1)

**Bài 50: Giải hệ phương trình:** $\begin{cases} x^5 + xy^4 = y^{10} + y^6 \\ \sqrt{4x+5} + \sqrt{y^2+8} = 6 \end{cases}$ $(x, y \in \mathbb{R})$.

**Lần 2 – THPT CAM LÂM**

**Lời giải tham khảo**

ĐK: $x \geq -\frac{5}{4}$

Nếu $y = 0$ thì từ phương trình (1) ta suy ra $x = 0$,

thế vào phương trình (2) ta thấy không thỏa mãn, vậy $y$ khác 0. ◎

Đặt $x = ky$ $(k \in \mathbb{R})$ ta được (1) trở thành

$k^5y^5 + ky^5 = y^{10} + y^6 \Leftrightarrow k^5 + k = y^5 + y$ (3).

Xét hàm số $f(t) = t^5 + t$ trên $\mathbb{R}$, ta có $f'(t) = 5t^4 + 1 > 0 \forall t \in \mathbb{R}$.

Do đó *f(t)* là hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$,

vậy $(3) \Leftrightarrow f(k) = f(y) \Leftrightarrow k = y \Rightarrow x = y^2$. ◎Thế vào (2) ta được

Thế vào (2) ta được

$$\sqrt{4x+5} + \sqrt{x+8} = 6 \Leftrightarrow 5x + 13 + 2\sqrt{4x^2 + 37x + 40} = 36$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{4x^2 + 37x + 40} = 23 - 5x$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 23 - 5x \geq 0 \\ 16x^2 + 148x + 160 = 25x^2 - 230x + 529 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5x \leq 23 \\ 9x^2 - 378x + 369 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq \frac{23}{5} \\ \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 41 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow x = 1$$ ◎

Với $x$=1 thì $y = \pm 1$.

Vậy cặp nghiệm của hệ phương trình : $(x, y) = (1;1)$ ; $(x, y) = (1;-1)$ ◎

**Bài 51: Giải hệ phương trình:** $\begin{cases} \sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}} + \sqrt{\frac{x^2+xy+y^2}{3}} = x + y & (1) \\ x\sqrt{2xy+5x+3} = 4xy - 5x - 3 & (2) \end{cases}$.

**Lần 1 – THPT GDTX NHA TRANG**

**Lời giải tham khảo**

Ta có

$$\frac{x^2+y^2}{2} = \frac{1}{4}(x+y)^2 + \frac{1}{4}(x-y)^2 \geq \frac{1}{4}(x+y)^2$$

$$\Rightarrow \sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}} \geq \frac{1}{2}|x+y| \geq \frac{1}{2}(x+y) \quad (3)$$

và $\frac{x^2+xy+y^2}{3} = \frac{1}{4}(x+y)^2 + \frac{1}{12}(x-y)^2 \geq \frac{1}{4}(x+y)^2$

$\Rightarrow \sqrt{\frac{x^2+xy+y^2}{3}} \geq \frac{1}{2}|x+y| \geq \frac{1}{2}(x+y)$ (4)

Từ (3) và (4) suy ra $\sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}} + \sqrt{\frac{x^2+xy+y^2}{3}} \geq x+y$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi x = y và x + y $\geq 0$.

(1) $\Leftrightarrow$ x = y và x $\geq 0$.

Thay y = x vào phương trình (2) ta được : $x\sqrt{2x^2+5x+3} = 4x^2 - 5x - 3$ (2′).

+ Với x = 0 thì x = 0 không phải là nghiệm của phương trình (2′).

+ Với x > 0 thì (2′) $\Leftrightarrow \sqrt{2+\frac{5}{x}+\frac{3}{x^2}} = 4 - (\frac{5}{x} + \frac{3}{x^2})$

Đặt t = $\sqrt{2+\frac{5}{x}+\frac{3}{x^2}}$, (t $\geq 0$),

ta có phương trình: $t^2 + t - 6 = 0 \Leftrightarrow$ t = 2 hoặc t = – 3 (loại)

- Với t = 2 $\Leftrightarrow \sqrt{2+\frac{5}{x}+\frac{3}{x^2}} = 2 \Leftrightarrow 2 + \frac{5}{x} + \frac{3}{x^2} = 4 \Leftrightarrow 2x^2 - 5x - 3 = 0$

$\Leftrightarrow$ x = 3 hoặc x = $-\frac{1}{2}$ (loại)

Vậy hệ phương trình có nghiệm $(x;y) = (3;3)$.

**Bài 52: Giải hệ phương trình:** $\begin{cases} x(x+y)+y^2 = 4x-1 \\ x(x+y)^2 - 2y^2 = 7x+2 \end{cases}$.

**Lần 2 – THPT GDTX NHA TRANG**

**Lời giải tham khảo**

+ nhận thấy x=0 không thỏa

+ Khi $x \neq 0$ ta có hệ tương đương $\begin{cases} x+y+\frac{y^2+1}{x} = 4 \\ (x+y)^2 - 2\frac{y^2+1}{x} = 7 \end{cases}$

+ Đặt $\begin{cases} x+y = a \\ \frac{y^2+1}{x} = b \end{cases}$ ta có hệ phương trình $\begin{cases} a+b = 4 \\ a^2 - 2b = 7 \end{cases}$

giải ra ta có $\begin{cases} a=3 \\ b=1 \end{cases} \vee \begin{cases} a=-5 \\ b=9 \end{cases}$

+ Từ đó tìm được $\begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases} \vee \begin{cases} x=5 \\ y=-2 \end{cases}$

**Bài 53: Giải hệ phương trình:** $\begin{cases} 2x^3 - 4x^2 + 3x - 1 = 2x^3(2-y)\sqrt{3-2y} & (1) \\ \sqrt{x+2} = \sqrt[3]{14 - x\sqrt{3-2y}} + 1 & (2) \end{cases}$.

Lần 2 – THPT HẬU LỘC

**Lời giải tham khảo**

Ta thấy $x=0$ không phải là nghiệm của hệ, chia cả hai vế của (1) cho $x^3$ ta được

$(1)\Leftrightarrow 2-\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2}-\frac{1}{x^3}=2(2-y)\sqrt{3-2y}$

$\Leftrightarrow\left(1-\frac{1}{x}\right)^3+\left(1-\frac{1}{x}\right)=(3-2y)\sqrt{3-2y}+\sqrt{3-2y}\quad(*)$

Xét hàm $f(t)=t^3+t$ luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$

$(*)\Leftrightarrow 1-\frac{1}{x}=\sqrt{3-2y}\qquad(3)$

Thế (3) vào (2) ta được $\sqrt{x+2}=\sqrt[3]{15-x}+1\Leftrightarrow\sqrt{x+2}-3+2-\sqrt[3]{15-x}=0$

$$\Leftrightarrow(x-7)\left(\underbrace{\frac{1}{\sqrt{x+2}+3}+\frac{1}{4-2\sqrt[3]{x+15}+\left(\sqrt[3]{x+15}\right)^2}}_{>0}\right)=0$$

Vậy hệ đã cho có nghiệm $(x;y)=\left(7;\frac{111}{98}\right)$.

**Bài 54: Giải phương trình:** $\sqrt{5+x}+\sqrt{1-x}+\sqrt{5-4x-x^2}=\frac{x}{2}+\sqrt{x+6}$.

Lần 1 – THPT HOÀNG HOA THÁM

**Lời giải tham khảo**

ĐK : $-5\le x\le 1$, đặt $y=\sqrt{5+x}+\sqrt{1-x}\ge 0$, PT$\Leftrightarrow\frac{1}{2}y^2+y-3=\frac{1}{2}\left(\sqrt{x+6}\right)^2+\sqrt{x+6}-3(*)$

Xét hàm số $f(t)=\frac{1}{2}t^2+t-3, t\ge 0$, $f'(t)=t+1>0,\forall t\ge 0$ nên hàm số luôn đồng biến trên $[0;+\infty)$.

$(*)\Leftrightarrow f(y)=f\left(\sqrt{x+6}\right)$

$\Leftrightarrow y=\sqrt{x+6}\Leftrightarrow x=\frac{2\sqrt{41}-8}{5}$ (thỏa đk)

**Bài 55: Giải hệ phương trình:** $\begin{cases}2(4x^3-y^3)+12x^2+y^2+2x(y^2+3)+1=0\\ \sqrt{y+2}.\sqrt[3]{x+5}=x^2+x-6\end{cases}$.

Lần 2 – THPT HOÀNG HOA THÁM

**Lời giải tham khảo**

Điều kiện : $y\ge -2$

Từ phương trình : $\Rightarrow (8x^3+12x^2+6x+1)+y^2(2x+1)-2y^3=0$

$\Leftrightarrow (2x+1)^3-y^3+(2x+1)y^2-y^3=0$

$\Leftrightarrow (2x+1-y)\left[(2x+1)^2+y(2x+1)+2y^2\right]=0$

$\Leftrightarrow (2x+1-y)\left[(2x+1+\frac{y}{2})^2+\frac{7y^2}{4}\right]=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=2x+1 \\ (2x+1+\frac{y}{2})^2+\frac{7y^2}{4}=0 \end{array}\right.$

Với $\left(2x+1+\frac{y}{2}\right)^2+\frac{7y^2}{4}=0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+1+\frac{y}{2}=0 \\ \frac{7y^2}{4}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{-1}{2} \\ y=0 \end{cases}$

Thay vào phương trình $\sqrt{y+2}\sqrt[3]{x+5}=x^2+x-6 \Leftrightarrow \sqrt{2}.\sqrt[3]{\frac{9}{2}}=\frac{1}{4}-\frac{1}{2}-6$ vô lý.

Với $y=2x+1$

Suy ra : $\sqrt{2x+1}\sqrt[3]{x+5}=x^2+x-6$ Điều kiện : $\begin{cases} 2x+3\ge 0 \\ x^2+x-6\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow x\ge 2$

$\Leftrightarrow x^2+x-6-\sqrt{2x+3}\sqrt[3]{x+5}=0$

$\Leftrightarrow \left(x-\sqrt{2x+3}\right)\sqrt[3]{x+5}+x\left(x-1-\sqrt[3]{x+5}\right)+2x-6=0$

$\Leftrightarrow \frac{(x^2-2x-3)\sqrt[3]{x+5}}{x+\sqrt{2x+3}}+\frac{x(x^3-3x^2+2x-6)}{(x-1)^2+(x-1)\sqrt[3]{x+5}+(\sqrt[3]{x+5})^2}+2x-6=0$

$\Leftrightarrow (x-3)\left[\frac{(x+1)\sqrt[3]{x+5}}{x+\sqrt{2x+3}}+\frac{x(x^2+2)}{\left(\sqrt[3]{x+5}+\frac{x-1}{2}\right)^2+\frac{3(x-1)^2}{4}}+2\right]=0$

$\Leftrightarrow x=3$

Vì $x\ge 2 \Rightarrow \frac{(x+1)\sqrt{2x+3}}{x+\sqrt{2x+3}}+\frac{x(x^2+2)}{\left(\sqrt[3]{x+5}+\frac{x-1}{2}\right)^2+\frac{3(x-1)^2}{4}}+4>0$.

**KẾT LUẬN:**

**Bài 56: Giải bất phương trình:** $\sqrt{x-\frac{1}{x}}-\sqrt{1-\frac{1}{x}}>\frac{x-1}{x}$.

**Lần 1 – THPT HỒNG LĨNH**

**Lời giải tham khảo**

).+ ĐK: x $\in$[-1; 0)$\cup$[1; +$\infty$)

Lúc đó:VP của (1) không âm nên (1) chỉ có nghiệm khi:

$\sqrt{x-\frac{1}{x}}>\sqrt{1-\frac{1}{x}} \Rightarrow x-\frac{1}{x}>1-\frac{1}{x} \Rightarrow x>1$. Vậy (1) chỉ có nghiệm trên (1; +$\infty$).

Trên (1; +$\infty$): (1) <=> $\sqrt{x+1}-1>\sqrt{\frac{x-1}{x}} \Leftrightarrow \sqrt{x+1}-\sqrt{\frac{x-1}{x}}>1$.

Do $x+1-\frac{x-1}{x}=\frac{x^2+1}{x}>0$ khi x > 1 nên:

(1) $\Leftrightarrow x+1+\frac{x-1}{x}-2\sqrt{\frac{x^2-1}{x}}>1 \Leftrightarrow x-\frac{1}{x}-2\sqrt{\frac{x^2-1}{x}}+1>0$

$\Leftrightarrow \frac{x^2-1}{x}-2\sqrt{\frac{x^2-1}{x}}+1>0 \Leftrightarrow (\sqrt{\frac{x^2-1}{x}}-1)^2>0 \Leftrightarrow x\neq\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Vậy nghiệm BPT là: $\begin{cases} x>1 \\ x\neq\frac{1+\sqrt{5}}{2} \end{cases}$

**Bài 57: Giải hệ phương trình:** $\begin{cases} 6x^3+3x^2+y=y^2+xy(3x-2) \\ \sqrt{4x^2-y-2}+\sqrt{x-1}=y-1 \end{cases}$.

**Lần 1 – THPT HỒNG QUANG**

**Lời giải tham khảo**

**HD:** Coi phương trình (1) là phương trình bậc hai ẩn y, gán $x=1000$ rồi bấm nghiệm ta được phân tích nhân dạng nhân tử: $(1)\Leftrightarrow (y+3x^2)(y-2x-1)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=-3x^2 \\ y=2x+1 \end{array}\right.$

Từ phương trình (2) ta có: $y\geq 1$ nên $y=-3x^2$ không thỏa mãn.

Thay $y=2x+1$ vào phương trình (2) ta được $\sqrt{4x^2-2x-3}+\sqrt{x-1}=2x$

Khảo sát casio thấy $x=2$ là nghiệm đơn nên có thể truy ngược dấu để liên hợp, hoặc bình phương liên tiếp khử căn.

ĐS: $x=2\Rightarrow y=5$

**Bài 58: Giải hệ phương trình:** $\begin{cases} \left(\sqrt{2016+x^2}+x\right)\left(\sqrt{504+y^2}+y\right)=1008 \\ x\sqrt{6x-4xy+1}=8xy+6x+1 \end{cases}$.

**Lần 2 – THPT HỒNG QUANG**

**Lời giải tham khảo**

**HD:** Phương trình (1) tương đương:

$\sqrt{2016+x^2}+x=\sqrt{2016+(-2y)^2}+(-2y)$

$\Leftrightarrow y=-\frac{x}{2}$

(Chú ý: $\sqrt{x^2+a}>|x|\geq x \Rightarrow \sqrt{x^2+a}-x>0$ $(a>0)$ để đảm bảo khác 0 khi liên hợp).

Thay vào (2):

$$x\sqrt{2x^2+6x+1}+4x^2-6x-1=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{25x^2}{4}-\left(\sqrt{2x^2+6x+1}-\frac{x}{2}\right)^2=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sqrt{2x^2+6x+1}=3x\\ \sqrt{2x^2+6x+1}=-2x\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=1\\ x=\dfrac{3+\sqrt{11}}{2}\end{array}\right.$$

ĐS: $(x;y)=\left\{\left(1;-\frac{1}{2}\right);\left(\frac{3-\sqrt{11}}{2};\frac{-3+\sqrt{11}}{4}\right)\right\}$

**Bài 59: Giải phương trình:** $\left(x^2-x-6\right)\sqrt{x-1}+\left(x-2\right)\sqrt{x+1}\geq 3x^2-9x+2$.

**Lần 3 – THPT HÙNG VƯƠNG – BÌNH PHƯỚC**

**Lời giải tham khảo**

$$pt \Leftrightarrow \left(x^2-x-6\right)\left(\sqrt{x-1}-1\right)+\left(x-2\right)\left(\sqrt{x+1}-2\right)\geq 2x^2-10x+12$$

$$\Leftrightarrow \frac{\left(x^2-x-6\right)\left(x-2\right)}{\sqrt{x-1}+1}+\frac{\left(x-2\right)\left(x-3\right)}{\sqrt{x+1}+2}\geq 2x^2-10x+12$$

$$\Leftrightarrow \frac{\left(x^2-5x+6\right)\left(x+2\right)}{\sqrt{x-1}+1}+\frac{\left(x^2-5x+6\right)}{\sqrt{x+1}+2}\geq 2\left(x^2-5x+6\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(x^2-5x+6\right)\left[\frac{x+2}{\sqrt{x-1}+1}+\frac{1}{\sqrt{x+1}+2}-2\right]\geq 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x^2-5x+6\right)\left[\frac{\left(\sqrt{x-1}-1\right)^2}{\sqrt{x-1}+1}+\frac{1}{\sqrt{x+1}+2}\right]\geq 0$$

$$\Leftrightarrow x\in\left[1;2\right]\cup\left[3;+\infty\right)$$

**Bài 60: Giải hệ phương trình:** $\begin{cases}x+3\sqrt{xy+x-y^2-y}=5y+4\\ \sqrt{4y^2-x-2}+\sqrt{y-1}=x-1\end{cases}$.

**Lần1 – THPT KHÁNH SƠN**

**Lời giải tham khảo**

Đk: $\begin{cases}xy+x-y^2-y\geq 0\\ 4y^2-x-2\geq 0\\ y-1\geq 0\end{cases}$

Ta có (1) $\Leftrightarrow x-y+3\sqrt{(x-y)(y+1)}-4(y+1)=0$

Đặt $u=\sqrt{x-y}, v=\sqrt{y+1}\ \ (u\geq 0, v\geq 0)$

Khi đó (1) trở thành : $u^2+3uv-4v^2=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}u=v\\ u=-4v(vn)\end{array}\right.$ ◎Với $u=v$ ta có $x=2y+1$, thay vào (2) ta được : $\sqrt{4y^2-2y-3}+\sqrt{y-1}=2y$

Với $u=v$ ta có $x=2y+1$, thay vào (2) ta được : $\sqrt{4y^2-2y-3}+\sqrt{y-1}=2y$

$\Leftrightarrow \sqrt{4y^2-2y-3}-(2y-1)+\left(\sqrt{y-1}-1\right)=0 \Leftrightarrow \dfrac{2(y-2)}{\sqrt{4y^2-2y-3}+2y-1}+\dfrac{y-2}{\sqrt{y-1}+1}=0$

$\Leftrightarrow (y-2)\left(\dfrac{2}{\sqrt{4y^2-2y-3}+2y-1}+\dfrac{1}{\sqrt{y-1}+1}\right)=0$

$\dfrac{2(y-2)}{\sqrt{4y^2-2y-3}+2y-1}+\dfrac{y-2}{\sqrt{y-1}+1}=0 \Leftrightarrow (y-2)\left(\dfrac{2}{\sqrt{4y^2-2y-3}+2y-1}+\dfrac{1}{\sqrt{y-1}+1}\right)=0$

$\Leftrightarrow y=2$ ( vì $\Leftrightarrow \dfrac{2}{\sqrt{4y^2-2y-3}+2y-1}+\dfrac{1}{\sqrt{y-1}+1}>0 \forall y\ge 1$)

Với $y=2$ thì $x=5$. Đối chiếu Đk ta được nghiệm của hệ PT là $(5;2)$

**Bài 61: Giải hệ phương trình:** $\begin{cases} 8\sqrt{2x-1}\left(2x-\sqrt{2x-1}\right)=y\left(y^2-2y+4\right) \\ 4xy+2\sqrt{(y+2)(y+2x)}=5y+12x-6 \end{cases}$ $(x;y\in\mathbb{R})$.

**Lần 1 – THPT KHOÁI CHÂU**

**Lời giải tham khảo**

ĐK: $\begin{cases} x\ge \dfrac{1}{2} \\ (y+2)(y+2x)\ge 0 \end{cases}$. Từ pt (1) $\Rightarrow$ để pt có nghiệm thì $y\ge 0$

PT $(1)\Leftrightarrow \left(2\sqrt{2x-1}\right)^3-2\left(2\sqrt{2x-1}\right)^2+4\left(2\sqrt{2x-1}\right)=y^3-2y^2+4y$ (*)

Xét hàm số $f(t)=t^3-2t^2+4t$ $(t\ge 0)$ có $f'(t)=3t^2-4t+4=2t^2+(t-2)^2>0$ $\forall t\ge 0$ nên *f(t)* luôn đồng biến⊚Từ pt (*) $\Rightarrow f\left(2\sqrt{2x-1}\right)=f(y)\Leftrightarrow 2\sqrt{2x-1}=y$

Từ pt (*) $\Rightarrow f\left(2\sqrt{2x-1}\right)=f(y)\Leftrightarrow 2\sqrt{2x-1}=y$

Thay vào pt ( 2 ) ta được pt $y^3+2(y+2)\sqrt{y+2}=3y(y+2)$⊚Đặt $z=\sqrt{y+2}$ ta được pt

$y^3+2z^3=3yz^2 \Leftrightarrow (y-z)^2(y+2z)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} y=-2z & (loại) \\ y=z & (t/m) \end{array}\right.$

Đặt $z=\sqrt{y+2}$ ta được pt $y^3+2z^3=3yz^2 \Leftrightarrow (y-z)^2(y+2z)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} y=-2z & (loại) \\ y=z & (t/m) \end{array}\right.$

Với y = z ta được $y=\sqrt{y+2}\Rightarrow y=2\Rightarrow x=1$ $(t/m)$

**Bài 62: Giải hệ phương trình:** $\begin{cases} \sqrt{x+\sqrt{y}}-\sqrt{x-\sqrt{y}}=\sqrt{4x-y} \quad (1) \\ \sqrt{x^2-9}=3\sqrt{y-3x+3}-2 \quad (2) \end{cases}$.

**Lần 1 – THPT KINH MÔN**

**Lời giải tham khảo**

Đk: $\begin{cases} y \ge 0; x \ge \sqrt{y}; 4x \ge y \\ x^2 \ge 9; y \ge 3x-3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \ge 3; y \ge 0 \\ \dfrac{y+3}{3} \ge x \ge \sqrt{y}; 4x \ge y; \end{cases}$

Từ (1) suy ra VT(1) $\ge 0$ nên bình phương hai vế ta có :

$2x - 2\sqrt{x^2 - y} = 4x - y \Leftrightarrow y - 2x = 2\sqrt{x^2 - y}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y \ge 2x \\ y^2 - 4xy + 4x^2 = 4(x^2 - y) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \ge 2x \\ \left[\begin{array}{l} y = 0 (l) \\ y = 4x - 4 \end{array}\right. \end{cases}$

Thay y = 4x-4 vào (2) ta có: $\sqrt{x^2 - 9} = 3\sqrt{x-1} - 2$ (3) Giải (3):

$(3) \Leftrightarrow \sqrt{x^2-9} - 4 = 3(\sqrt{x-1} - 2) \Leftrightarrow \dfrac{x^2 - 25}{\sqrt{x^2-9}+4} = \dfrac{3(x-5)}{(\sqrt{x-1}+2)}$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 5 \Rightarrow y = 16 \\ \dfrac{x+5}{\sqrt{x^2-9}+4} = \dfrac{3}{(\sqrt{x-1}+2)} (4) \end{array}\right.$

Do $x \ge 3 \Rightarrow \sqrt{x^2-9} < x \Rightarrow \dfrac{x+5}{\sqrt{x^2-9}+4} > \dfrac{x+5}{x+4} > 1$ và $\dfrac{3}{(\sqrt{x-1}+2)} < 1 \Leftrightarrow 1 < \sqrt{x-1} \Leftrightarrow x > 2$ luôn đúng khi $x \ge 3$ nên (4) vô nghiệm.

Vậy x= 5 ; y =16 là nghiệm duy nhất của hệ phương trình.

**Bài 63: Giải hệ phương trình:** $\begin{cases} x + 3\sqrt{xy + x - y^2 - y} = 5y + 4 \\ \sqrt{4y^2 - x - 2} + \sqrt{y-1} = x - 1 \end{cases}$.

**Lần 1 – THPT LAM KINH**

**Lời giải tham khảo**

Đk: $\begin{cases} xy + x - y^2 - y \ge 0 \\ 4y^2 - x - 2 \ge 0 \\ y - 1 \ge 0 \end{cases}$. Ta có $(1) \Leftrightarrow x - y + 3\sqrt{(x-y)(y+1)} - 4(y+1) = 0$

Đặt $u = \sqrt{x-y}, v = \sqrt{y+1}$ $(u \ge 0, v \ge 0)$

Khi đó (1) trở thành : $u^2 + 3uv - 4v^2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u = v \\ u = -4v (vn) \end{array}\right.$

Với $u = v$ ta có $x = 2y + 1$, thay vào (2) ta được : $\sqrt{4y^2 - 2y - 3} + \sqrt{y-1} = 2y$

$\Leftrightarrow \sqrt{4y^2-2y-3} - (2y-1) + (\sqrt{y-1} - 1) = 0$ $\dfrac{2(y-2)}{\sqrt{4y^2-2y-3}+2y-1} + \dfrac{y-2}{\sqrt{y-1}+1} = 0$

$\Leftrightarrow (y-2)\left(\dfrac{2}{\sqrt{4y^2-2y-3}+2y-1} + \dfrac{1}{\sqrt{y-1}+1}\right) = 0 \circledcirc \Leftrightarrow y = 2$

$\Leftrightarrow y = 2$

( vì $\Leftrightarrow \frac{2}{\sqrt{4y^2-2y-3}+2y-1}+\frac{1}{\sqrt{y-1}+1}>0\forall y\geq 1$)

Với $y=2$ thì $x=5$. Đối chiếu điều kiện ta được nghiệm của hệ PT là $(5;2)$

**Bài 64: Giải hệ phương trình:** $\begin{cases}2x^2-y^2+xy-5x+y+2=\sqrt{y-2x+1}-\sqrt{3-3x}\\x^2-y-1=\sqrt{4x+y+5}-\sqrt{x+2y-2}\end{cases}$.

**Lần 2 – THPT LÊ LỢI**

**Lời giải tham khảo**

* ĐK: $y-2x+1\geq 0, 4x+y+5\geq 0, x+2y-2\geq 0, x\leq 1$

* Xét trường hợp: $\begin{cases}y-2x+1=0\\3-3x=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\y=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}0=0\\-1=\sqrt{10}-1\end{cases}$ (Không TM hệ)

* Xét trường hợp: $x\neq 1, y\neq 1$. Đưa PT(1) về dạng tích ta được

$$(x+y-2)(2x-y-1)=\frac{x+y-2}{\sqrt{y-2x+1}+\sqrt{3-3x}}$$

$(x+y-2)\left[\frac{1}{\sqrt{y-2x+1}+\sqrt{3-3x}}+y-2x+1\right]=0$. Do $y-2x+1\geq 0$

nên $\frac{1}{\sqrt{y-2x+1}+\sqrt{3-3x}}+y-2x+1>0\Rightarrow x+y-2=0$

* Thay $y=2-x$ vào PT(2) ta được $x^2+x-3=\sqrt{3x+7}-\sqrt{2-x}$

$\Leftrightarrow x^2+x-2=\sqrt{3x+7}-1+2-\sqrt{2-x}\Leftrightarrow (x+2)(x-1)=\frac{3x+6}{\sqrt{3x+7}+1}+\frac{2+x}{2+\sqrt{2-x}}$

$\Leftrightarrow (x+2)\left[\frac{3}{\sqrt{3x+7}+1}+\frac{1}{2+\sqrt{2-x}}+1-x\right]=0\Leftrightarrow x+2=0$

(vì $x\leq 1$ nên $\frac{3}{\sqrt{3x+7}+1}+\frac{1}{2+\sqrt{2-x}}+1-x>0$)

* $x+2=0\Leftrightarrow x=-2\Rightarrow y=4$ (TMĐK). Nghiệm của hệ là $(x;y)=(-2;-4)$

**Bài 65: Giải hệ phương trình:** $\sqrt{7x^2+25x+19}-\sqrt{x^2-2x-35}=7\sqrt{x+2}$.

**Lần 1 – THPT LÊ LỢI**

**Lời giải tham khảo**

Điều kiện $x\geq 7$

Phương trình tương đương $\sqrt{7x^2+25x+19}=7\sqrt{x+2}+\sqrt{x^2-2x-35}$.

Bình phương 2 vế suy ra: $3x^2-11x-22=7\sqrt{(x+2)(x+5)(x-7)}$

$$3(x^2-5x-14)+4(x+5)=7\sqrt{(x+5)(x^2-5x-14)}$$

Đặt $a=\sqrt{x^2-5x-14}; b=\sqrt{x+5}$.( a ,b ≥ 0) Khi đó ta có phương trình

$3a^2+4b^2=7ab\Leftrightarrow 3a^2-7ab+4b^2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=b\\3a=4b\end{array}\right.$

Với a = b suy ra $x=3+2\sqrt{7}\,(t/m)$; $x=3-2\sqrt{7}\,(l)$.

Với 3a = 4b suy ra $x=\dfrac{61+\sqrt{11137}}{18}(t/m);\ x=\dfrac{61-\sqrt{11137}}{18}(l)$.

Đs: $x=3+2\sqrt{7}$; $x=\dfrac{61+\sqrt{11137}}{18}$.

**Bài 66: Giải hệ phương trình:** $\dfrac{3(x^2+2x-3)}{\sqrt{x+4}-1}-\dfrac{7x^2-19x+12}{\sqrt{12-7x}}=16x^2+11x-27$.

**Lần1 – THPT LÊ QUÝ ĐÔN**

**Lời giải tham khảo**

Điều kiện : $\begin{cases}-4\le x<\dfrac{12}{7} \\ x\ne -3\end{cases}$ (*)

$(1)\Leftrightarrow (x-1)\left(3\sqrt{x+4}+\sqrt{12-7x}-16x-24\right)=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ 3\sqrt{x+4}+\sqrt{12-7x}-16x-24=0 \quad (2)\end{array}\right.$

$(2)\Leftrightarrow 3\sqrt{x+4}+\sqrt{12-7x}=9\left(\sqrt{x+4}\right)^2-\left(\sqrt{12-7x}\right)^2$

$\Leftrightarrow 3\sqrt{x+4}+\sqrt{12-7x}=\left(3\sqrt{x+4}+\sqrt{12-7x}\right)\left(3\sqrt{x+4}-\sqrt{12-7x}\right)$

$\Leftrightarrow 3\sqrt{x+4}-\sqrt{12-7x}=1\Leftrightarrow 3\sqrt{x+4}=\sqrt{12-7x}+1$

$\Leftrightarrow 9(x+4)=12-7x+1+2\sqrt{12-7x}$

$\Leftrightarrow 2\sqrt{12-7x}=16x+23\Leftrightarrow \begin{cases}-\dfrac{23}{16}\le x<\dfrac{12}{7} \\ 48-28x=256x^2+736x+529\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}-\dfrac{23}{16}\le x<\dfrac{12}{7} \\ 256x^2+764x+481=0\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}-\dfrac{23}{16}\le x<\dfrac{12}{7} \\ x=\dfrac{-382\pm 6\sqrt{633}}{256}\end{cases}\Leftrightarrow x=\dfrac{-382+6\sqrt{633}}{256}$

Kết luận nghiệm của phương trình là : $x=1$ , $x=\dfrac{-382+6\sqrt{633}}{256}$

**Bài 67: Giải hệ phương trình:** $\begin{cases}\sqrt{x+3}+\sqrt{xy+x+3y+3}+x+1=2y+\sqrt{y+1} \\ (x-3)(y+1)=(y-1)(x^2-2x+3)\left(\sqrt{x+1}-2\right)\end{cases}(x,y\in\mathbb{R})$.

**Lần 3 – THPT LƯƠNG TÀI 2**

**Lời giải tham khảo**

$Pt(1)\Leftrightarrow \sqrt{x+3}+\sqrt{(x+3)(y+1)}+x-2y+1=\sqrt{y+1}$

Đặt $\begin{cases}a=\sqrt{x+3} \\ b=\sqrt{y+1}\end{cases}(a,b\ge 0)$, (1) trở thành: $a^2-2b^2+ab+a-b=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}a=b \\ a+2b+1=0\end{array}\right.$

**+** $a+2b+1=0$ **vô nghiệm do** $a,b\ge 0$

**+ Xét a = b** $\Rightarrow y=x+2$ **thay vào (2) ta được:**

$(x-3)(x+3)=(x+1)(x^2-2x+3)\left(\sqrt{x+1}-2\right)$

$$\Leftrightarrow (x-3)(x+3)=(x+1)(x^2-2x+3).\frac{x-3}{\sqrt{x+1}+2}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3\Rightarrow y=5(tm) \\ (x+3)\left(\sqrt{x+1}+2\right)=(x+1)\left(x^2-2x+3\right)(*) \end{array}\right.$$

**(*)** $\Leftrightarrow \left[\left(\sqrt{x+1}\right)^2+2\right]\left(\sqrt{x+1}+2\right)=\left[(x-1)+2\right]\left[(x-1)^2+2\right]$

**Xét hàm số** $f(t)=(t+2)(t^2+2)$ **,** $t\ge 0$ **có** $f'(t)>0\forall t\in\mathbb{R}$

**Suy ra** $f(t)$ **đồng biến mà** $f\left(\sqrt{x+1}\right)=f(x-1)\Leftrightarrow \sqrt{x+1}=x-1$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 1 \\ x^2-3x=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=3\Rightarrow y=5$$

**Vậy hpt có nghiệm:** $(3;5)$

**Bài 68: Giải hệ phương trình:** $\begin{cases} xy-y^2+2y-x-1=\sqrt{y-1}-\sqrt{x} \\ 3\sqrt{6-y}+3\sqrt{2x+3y-7}=2x+7 \end{cases}$.

**Lần 1 – THPT LÝ THÁI TỔ**

**Lời giải tham khảo**

Điều kiện: $x\ge 0, 1\le y\le 6, 2x+3y-7\ge 0$ (*)

Nhận thấy $\begin{cases} x=0 \\ y=1 \end{cases}$ không là nghiệm của hệ phương trình $\Rightarrow \sqrt{y-1}+\sqrt{x}\ne 0$ ◎Khi đó,

$$\text{PT (1)} \Leftrightarrow x(y-1)-(y-1)^2=\frac{y-1-x}{\sqrt{y-1}+\sqrt{x}}$$

$$\text{Khi đó, PT (1)} \Leftrightarrow x(y-1)-(y-1)^2=\frac{y-1-x}{\sqrt{y-1}+\sqrt{x}}$$

$$\Leftrightarrow (y-1)(x-y+1)=\frac{y-1-x}{\sqrt{y-1}+\sqrt{x}}$$

$$\Leftrightarrow (x-y+1)\left(y-1+\frac{1}{\sqrt{y-1}+\sqrt{x}}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow x-y+1=0\Leftrightarrow y=x+1 \text{ (do (*))}$$

Thay vào PT (2) ta được: $3\sqrt{5-x}+3\sqrt{5x-4}=2x+7$ ĐK: $4/5\le x\le 5$ (**)

$$\Leftrightarrow 3\sqrt{5-x}-(7-x)+3(\sqrt{5x-4}-x)=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{-4+5x-x^2}{3\sqrt{5-x}+(7-x)}+\frac{3(-4+5x-x^2)}{\sqrt{5x-4}+x}=0$$

$$\Leftrightarrow (-4+5x-x^2)\left(\frac{1}{3\sqrt{5-x}+(7-x)}+\frac{3}{\sqrt{5x-4}+x}\right)=0 ◎$$

$$\Leftrightarrow -x^2+5x-4=0 \text{ (do (**))}$$

$$\Leftrightarrow -x^2+5x-4=0 \text{ (do (**))}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \Rightarrow y=2 \\ x=4 \Rightarrow y=5 \end{array}\right. \text{(thỏa mãn (*),(**))}$$

Vậy nghiệm của hệ phương trình là: $(1;2),\ (4;5)$.

**Bài 69: Giải bất phương trình:** $\sqrt{x^3+20x^2+4x}+4x\le 2x\sqrt{x}+4\sqrt{x}$.

**Lần1 – THPT LÝ THƯỜNG KIỆT**

**Lời giải tham khảo**

: $pt\Leftrightarrow \sqrt{x}\left(\sqrt{x^2+20x+4}+\sqrt{x}-2x-4\right)\le 0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ \sqrt{x^2+20x+4}+\sqrt{x}-2x-4\le 0,\quad (*)\end{array}\right.$

$(*)\Leftrightarrow \sqrt{x+\dfrac{4}{x}+20}+1-2\left(\sqrt{x}+\dfrac{2}{\sqrt{x}}\right)\le 0$; Đặt $t=\sqrt{x}+\dfrac{2}{\sqrt{x}};t\ge 2\sqrt{2}$

Ta được bất phương trình $\begin{cases} t\ge \dfrac{1}{2} \\ 3t^2-4t-15\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow t\ge 3$

Đáp số: $S=[0;1]\cup[4;+\infty)$

**Bài 70: Giải phương trình:** $\dfrac{2x^5+3x^4-14x^3}{\sqrt{x+2}}=\left(4x^4+14x^3+3x^2+2\right)\left(1-\dfrac{2}{\sqrt{x+2}}\right)$..

**Lần 2 – THPT BLÝ THÁI TỔ**

**Lời giải tham khảo**

Điền kiện: $x>-2$ (*).

$PT\Leftrightarrow x^3(2x^2+3x-14)=(4x^4+14x^3+3x^2+2)\left(\sqrt{x+2}-2\right)$

$\Leftrightarrow x^3(x-2)(2x+7)\left(\sqrt{x+2}+2\right)=(4x^4+14x^3+3x^2+2)(x+2-4)$

$\Leftrightarrow x^3(x-2)(2x+7)\left(\sqrt{x+2}+2\right)=(4x^4+14x^3+3x^2+2)(x-2)$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-2=0\Leftrightarrow x=2\ \text{(thỏa mãn (*))} \\ x^3(2x+7)\left(\sqrt{x+2}+2\right)=4x^4+14x^3+3x^2+2\quad (1)\end{array}\right.$

$(1)\Leftrightarrow x^3(2x+7)\sqrt{x+2}+4x^4+14x^3=4x^4+14x^3+3x^2+2$

$\Leftrightarrow x^3(2x+7)\sqrt{x+2}=3x^2+2$

Nhận thấy $x=0$ không là nghiệm của phương trình $\Rightarrow x\ne 0$.

Khi đó, $PT\Leftrightarrow (2x+4+3)\sqrt{x+2}=\dfrac{3}{x}+\dfrac{2}{x^3}$

$\Leftrightarrow 2(x+2)\sqrt{x+2}+3\sqrt{x+2}=\dfrac{2}{x^3}+\dfrac{3}{x}\quad (2)$

Xét hàm số: $f(t)=2t^3+3t$ với $t\in\mathbb{R}$.

Ta có: $f'(t)=6t^2+3>0\quad \forall t\in\mathbb{R}$

$\Rightarrow$ Hàm số $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

$(2)\Leftrightarrow f\left(\sqrt{x+2}\right)=f\left(\dfrac{1}{x}\right)\Leftrightarrow \sqrt{x+2}=\dfrac{1}{x}\Leftrightarrow x\sqrt{x+2}=1$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x>0 \\ (x+1)(x^2+x-1)=0\end{cases}\Leftrightarrow x=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$ (thỏa mãn (*))

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là: $x=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}, x=2.$

**Bài 71: Giải hệ phương trình:** $5\left(1+\sqrt{1+x^3}\right)=x^2\left(4x^2-25x+18\right)$.

**Lần 1 – THPT MARIE – CURIE**

**Lời giải tham khảo**

Điều kiện: $x\ge -1$.

$$5\left(1+\sqrt{1+x^3}\right)=x^2\left(4x^2-25x+18\right)$$

$$\Leftrightarrow 5+5\sqrt{1+x^3}=4x^4-25x^3+18x^2$$

$$\Leftrightarrow 25x^3+25+5\sqrt{1+x^3}=4x^4+18x^2+20$$

$$\Leftrightarrow 25\left(x^3+1\right)+5\sqrt{1+x^3}=\left(4x^4+16x^2+16\right)+2x^2+4$$

$$\Leftrightarrow \left(5\sqrt{1+x^3}\right)^2+5\sqrt{1+x^3}=\left(2x^2+4\right)^2+2x^2+4 \qquad (1)$$

Hàm số $f(t)=t^2+t$ đồng biến trên $[0;+\infty)$ nên

$$(1)\Leftrightarrow f\left(5\sqrt{1+x^3}\right)=f\left(2x^2+4\right)$$

$$\Leftrightarrow 5\sqrt{1+x^3}=2\left(x^2+2\right)$$

$$\Leftrightarrow 5\sqrt{(x+1)\left(x^2-x+1\right)}=2\left[(x+1)+\left(x^2-x+1\right)\right] \qquad (2)$$

Đặt: $u=\sqrt{x+1}\ge 0$ và $v=\sqrt{x^2-x+1}>0$

(2) thành: $5uv=2\left(u^2+v^2\right)\Leftrightarrow 2\left(\frac{u}{v}\right)^2-5\left(\frac{u}{v}\right)+2=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\frac{u}{v}=2\\ \frac{u}{v}=\frac{1}{2}\end{array}\right.$

Với $\frac{u}{v}=2$: $\sqrt{x+1}=2\sqrt{x^2-x+1}\Leftrightarrow \begin{cases}x\ge -1\\ 4x^2-5x+3=0\end{cases}$ vô nghiệm.

Với $\frac{u}{v}=\frac{1}{2}$: $2\sqrt{x+1}=\sqrt{x^2-x+1}\Leftrightarrow \begin{cases}x\ge -1\\ x^2-5x-3=0\end{cases}\Leftrightarrow x=\frac{5\pm\sqrt{37}}{2}$.

Phương trình có hai nghiệm: $x=\frac{5\pm\sqrt{37}}{2}$.

**Bài 72: Giải bất phương trình:**

$(x+2)(x-2\sqrt{2x+5})-9\le (x+2)(3\sqrt{x^2+5}-x^2-12)+\sqrt[3]{5x^2+7}$.

**Lần 3 – THPT MINH CHÂU**

**Lời giải tham khảo**

$$\Leftrightarrow (x-2)\left(x^2+5x+9-\frac{4(x+2)}{\sqrt{2x+5}+3}-\frac{3(x+2)^2}{\sqrt{x^2+5}+3}-\frac{5(x+2)}{9+3\sqrt[3]{5x^2+7}+\left(\sqrt[3]{5x^2+7}\right)^2}\right)\le 0(*)$$ Ta có với

$$x\ge -\frac{5}{2}\Rightarrow \begin{cases}\dfrac{4(x+2)}{\sqrt{2x+5}+3}\le \dfrac{4}{3}(x+2);\dfrac{3(x+2)^2}{\sqrt{x^2+5}+3}<\dfrac{3}{5}(x+2)^2\\ \dfrac{5(x+2)}{9+3\sqrt[3]{5x^2+7}+\left(\sqrt[3]{5x^2+7}\right)^2}<\dfrac{5(x+2)}{9}\end{cases}$$

$$\Rightarrow x^2+5x+9-\frac{4(x+2)}{\sqrt{2x+5}+3}-\frac{3(x+2)^2}{\sqrt{x^2+5}+3}-\frac{5(x+2)}{9+3\sqrt[3]{5x^2+7}+\left(\sqrt[3]{5x^2+7}\right)^2}>$$

$$\frac{18x^2+57x+127}{45}>0,\forall x\ge -\frac{5}{2}$$

Do đó $(*)\Leftrightarrow x-2\le 0\Leftrightarrow x\le 2$, kết hợp với điều kiện $x\ge -\dfrac{5}{2}$

ta suy ra bất phương trình đã cho có nghiệm là $-\dfrac{5}{2}\le x\le 2$

**Bài 73: Giải hệ phương trình:** $\begin{cases}2x^3+xy^2+x=2y^3+4x^2y+2y\\ \dfrac{2y^2-x-2y-16}{x^2-8y+7}=\left(y+\dfrac{1}{2}\right)\left(\sqrt{x+1}-3\right)\end{cases}$ $(x,y\in\mathbb{R})$.

**Lần 2 – THPT MINH CHÂU**

**Lời giải tham khảo**

+) ĐKXĐ: $x\ge -1$ (*)

+) $pt(1)\Leftrightarrow (x-2y)+(2x^3-4x^2y)+(xy^2-2y^3)=0\Leftrightarrow (x-2y)(1+2x^2+y^2)=0\Leftrightarrow x=2y$

Vì $1+2x^2+y^2>0,\ \forall x,y$ Thế vào (2) được:

$$\frac{2(\frac{x}{2})^2-x-x-16}{x^2-4x+7}=\left(\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\right)\left(\sqrt{x+1}-3\right)\Leftrightarrow \frac{x^2-4x-32}{x^2-4x+7}=(x+1)\left(\sqrt{x+1}-3\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x-8)(x+4)}{x^2-4x+7}=\frac{(x+1)(x-8)}{\sqrt{x+1}+3}\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=8\\ \dfrac{x+4}{x^2-4x+7}=\dfrac{x+1}{\sqrt{x+1}+3}\quad (3)\end{array}\right.$$

+) $x=8\Rightarrow y=4$ (tm). ⊚+) $pt(3)\Leftrightarrow\left(\sqrt{x+1}+3\right)(x+4)=(x+1)\left(x^2-4x+7\right)$

+) $pt(3)\Leftrightarrow\left(\sqrt{x+1}+3\right)(x+4)=(x+1)\left(x^2-4x+7\right)$

$$\Leftrightarrow\left(\sqrt{x+1}+3\right)\left[\left(\sqrt{x+1}\right)^2+3\right]=\left[(x-2)+3\right].\left[(x-2)^2+3\right]\quad (4)$$

+) Xét hàm số $f(t)=(t+3)\left(t^2+3\right)$ với $t\in\mathbb{R}$ có $f'(t)=3(t+1)^2\ge 0,\ \forall t\in\mathbb{R}$

nên $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

+) Mà pt(4) có dạng: $f\left(\sqrt{x+1}\right)=f(x-2)$

Do đó $(4) \Leftrightarrow \sqrt{x+1} = x-2 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ x+1 = x^2 - 4x + 4 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ x^2 - 5x + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \dfrac{5+\sqrt{13}}{2}$ (T/M)

+) Với $x = \dfrac{5+\sqrt{13}}{2} \Rightarrow y = \dfrac{11+\sqrt{13}}{4}$

Vậy hệ đã cho có tập nghiệm $(x;y)$ là: $T = \left\{(8;4); \left(\dfrac{5+\sqrt{13}}{2}; \dfrac{11+\sqrt{13}}{4}\right)\right\}$

**Bài 74: Giải hệ phương trình:** $\sqrt{2x+3} + \sqrt{x+1} \leq 3x + 2\sqrt{2x^2+5x+3} - 16$.

**Lần 1 – THPT NAM DUYÊN HÀ**

**Lời giải tham khảo**

Điều kiện: $x \geq -1$.

Bpt (1) tương đương: $\sqrt{2x+3} + \sqrt{x+1} \leq \left(\sqrt{2x+3} + \sqrt{x+1}\right)^2 - 20$

Đặt $t = \sqrt{2x+3} + \sqrt{x+1}$, t >0

Bpt trở thành: $t^2 - t - 20 \geq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t \geq 5 \\ t \leq -4 \end{array}\right.$. Đối chiếu đk được $t \geq 5$.

Với $t \geq 5$, ta có: $\sqrt{2x+3} + \sqrt{x+1} \geq 5 \Leftrightarrow 2\sqrt{2x^2+5x+3} \geq -3x + 21$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} -3x + 21 < 0 \\ 2x^2 + 5x + 3 \geq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} -3x + 21 \geq 0 \\ x^2 - 146x + 429 \leq 0 \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x > 7 \\ 3 \leq x \leq 7 \end{array}\right. \Leftrightarrow x \geq 3$$

Kết hợp với điều kiện $x \geq -1$ suy ra tập nghiệm bất pt là: S=$[3;+\infty)$

**Bài 75: Giải hệ phương trình:** $\begin{cases} (x+2)\sqrt{x^2+4x+7} + y\sqrt{y^2+3} + x + y + 2 = 0 \\ \sqrt{x^2+y+1} = x - y + 1 \end{cases}$.

**Lần 1 – THPT NGHỀ NHA TRANG**

**Lời giải tham khảo**

Xét hàm số $f(t) = t\sqrt{t^2+3} + t$ Có $f'(t) = \sqrt{t^2+3} + \dfrac{t^2}{\sqrt{t^2+3}} + 1 > 0\ \forall t$

$\Rightarrow$Hàm số f(t) đồng biến trên R$\Rightarrow$Phương trình (1) $\Leftrightarrow x + 2 = -y$ ◎Thay vào (2) ta có

Thay vào (2) ta có

$$\sqrt{x^2-x-1}=2x+3 \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge -\frac{3}{2} \\ x^2-x-1=4x^2+12x+9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge -\frac{3}{2} \\ x^2-x-1=4x^2+12x+9 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \ge -\frac{3}{2} \\ 3x^2+13x+10=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge -\frac{3}{2} \\ \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=-\frac{10}{3} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow x=-1 \Rightarrow y=-1 \quad \text{(tmdk)}$$

Vậy hệ có nghiệm (x;y) = (-1;-1).◎

**Bài 76: Giải hệ phương trình:** $\begin{cases} x(3x+2y)(x+1)=12 \\ x^2+4x+2y-8=0 \end{cases}$.

**Lần 2 – THPT NGHỀ NHA TRANG**

**Lời giải tham khảo**

**TA CÓ:** $\begin{cases} x(3x+2y)(x+1)=12 \\ x^2+4x+2y-8=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (3x+2y)(x^2+x)=12 \\ (3x+2y)+(x^2+x)=8 \end{cases}$ (1)

Đặt $\begin{cases} u=3x+2y \\ v=x^2+x \end{cases}$ thì hệ (1) $\Leftrightarrow \begin{cases} u.v=12 \\ u+v=8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u=6 \\ v=2 \end{cases} \vee \begin{cases} u=2 \\ v=6 \end{cases}$

$$\begin{cases} u=6 \\ v=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x+2y=6 \\ x^2+x=2 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=1 \\ y=3/2 \end{cases} \\ \begin{cases} x=-2 \\ y=6 \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\begin{cases} u=2 \\ v=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x+2y=2 \\ x^2+x=6 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=-3 \\ y=11/2 \end{cases} \\ \begin{cases} x=2 \\ y=-2 \end{cases} \end{array}\right.$$

**KẾT LUẬN:**

**Bài 77: Giải hệ phương trình:** $\begin{cases} x+4+\sqrt{x^2+8x+17}=y+\sqrt{y^2+1} \\ x+\sqrt{y}+\sqrt{y+21}+1=2\sqrt{4y-3x} \end{cases}$.

**Lần 1 – THPT NGHỀ NINH HÒA**

**Lời giải tham khảo**

Điều kiện: y $\ge 0$

$$x+4+\sqrt{x^2+8x+17}=y+\sqrt{y^2+1}$$
$$\Leftrightarrow (x+4)+\sqrt{(x+4)^2+1}=y+\sqrt{y^2+1}$$

Xét hàm số: $f(t)=t+\sqrt{t^2+1}$ với t $\ge 0$

Ta có : $f'(t)=1+\dfrac{t}{\sqrt{t^2+1}}>0,\forall t\ge 0$

Suy ra f(t) là hàm số đồng biến và liên tục với $t\ge 0$

Do đó : $(x+4)+\sqrt{(x+4)^2+1}=y+\sqrt{y^2+1}$

$\Leftrightarrow$ f(x+4)=f(y)

$\Leftrightarrow$ y = x + 4

Thay y = x +4 vào phương trình thứ hai, ta có :

$x+\sqrt{x+4}+\sqrt{x+25}+1=2\sqrt{x+16}$ (*) , đk: $x\ge -4$

Nhận xét: x = -4 không phải là nghiệm của phương trình (*)

Xét hàm số: g(x) = $x+\sqrt{x+4}+\sqrt{x+25}+1-2\sqrt{x+16}$ với $x\in(-4;\ +\infty)$

Ta có: $g'(x) = 1+\dfrac{1}{2\sqrt{x+4}}+\dfrac{1}{2\sqrt{x+25}}-\dfrac{1}{\sqrt{x+16}}$

$\Leftrightarrow g'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x+4}}+\dfrac{1}{2\sqrt{x+25}}+\dfrac{\sqrt{x+16}-1}{\sqrt{x+16}}$

$\Leftrightarrow\ g'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x+4}}+\dfrac{1}{2\sqrt{x+25}}+\dfrac{x+15}{\sqrt{x+16}(\sqrt{x+16}+1)}\ \ge 0$

với $x\in(-4;\ +\infty)$

Suy ra g(x) là hàm số đồng biến và liên tục với $x\in(-4;\ +\infty)$

Do đó phương trình g(x) = 0 có tối đa một nghiệm với $x\in(-4;\ +\infty)$

Mặt khác : g(0) = 0 nên phương trình (*) có nghiệm duy nhất x = 0.

$\Rightarrow$ y = x + 4 = 0+ 4 =4

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất : x = 0 ; y = 4

**Bài 78: Giải bất phương trình:** $\dfrac{x(x-1)^2(\sqrt{2x+3}-1)}{(x+1)(2x+3)}\ge 2$.

**Lần 2 – THPT NGHỀ NINH HÒA**

**Lời giải tham khảo**

Điều kiện: $x\in\left(-\dfrac{3}{2};+\infty\right)\backslash\{-1\}$

Mà $\dfrac{x(x-1)^2(\sqrt{2x+3}-1)}{(x+1)(2x+3)}\ge 2\Leftrightarrow\dfrac{x(x-1)^2(\sqrt{2x+3}-1)}{\left(\sqrt{2x+3}+1\right)(\sqrt{2x+3}-1)(2x+3)}\ge 1$

$\Leftrightarrow\dfrac{x(x-1)^2}{\left(\sqrt{2x+3}+1\right)(2x+3)}\ge 1\Leftrightarrow x(x-1)^2\ge(\sqrt{2x+3}+1)(2x+3)$ (*)

$\Leftrightarrow x^3-2x^2+x\ge(2x+3)\sqrt{2x+3}+2x+3$

$\Leftrightarrow x^2(x-2)\ge(2x+3)\sqrt{2x+3}+x+3>0$

$\Rightarrow x>2$. Vậy điều kiện của phương trình là : $x>2$

(*) $\Leftrightarrow\left((x-1)+1\right)(x-1)^2\ge\left(\sqrt{2x+3}+1\right)\left(\sqrt{2x+3}\right)^2$

Xét hàm số $f(t) = (t+1)t^2$ với t > 1 (vì x >2 nên x – 1> 1)

Ta có : $f(t) = t^3 + t^2 \Rightarrow f'(t)=3t^2+2t,\forall t>1$

Suy ra f(t) là hàm số liên tục và đồng biến trên $(1;+\infty)$

hay $f(x-1) \geq f(\sqrt{2x+3})$. ◎Khi đó:

Khi đó:

$$\begin{cases} x > 2 \\ x-1 \geq \sqrt{2x+3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 - 4x - 2 \geq 0 \\ x > 2 \end{cases} \Rightarrow x \geq 2+\sqrt{6}$$

Vậy S= $\left[2+\sqrt{6};+\infty\right)$ ⚜

**Bài 79: Giải hệ phương trình:** $x\sqrt{x-1} = (2x-3)^2(2x-2) + x - 2$.

**Lần 2 – THPT NGÔ SỸ LIÊN**

**Lời giải tham khảo**

TXĐ: D $= [1;+\infty)$.

$$x\sqrt{x-1} = (2x-3)^2(2x-2) + x - 2$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x-1}^3 + \sqrt{x-1}^2 + \sqrt{x-1} = (2x-3)^3 + (2x-3)^2 + (2x-3)$$

$$\Leftrightarrow f\left(\sqrt{x-1}\right) = f(2x-3)$$

Xét hàm số $f(t) = t^3 + t^2 + t$ có $f'(t) = 3t^2 + 2t + 1 > 0, \forall t \in \mathbb{R}$

Do đó hàm số $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Suy ra: $f\left(\sqrt{x-1}\right) = f(2x-3)$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x-1} = 2x-3$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \dfrac{3}{2} \\ x-1 = 4x^2 - 12x + 9 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2$$

▪ Vậy $x = 2$ là nghiệm duy nhất của phương trình.

**Bài 80: Giải hệ phương trình:** $\begin{cases} \sqrt{x^2-(x+y)}\sqrt[3]{x-y} = y \\ 2(x^2+y^2) - 3\sqrt{2x-1} = 11 \end{cases}$.

**Lần 1 – THPT NGUYỄN BÌNH**

**Lời giải tham khảo**

Hệ đã cho tương đương với $\begin{cases} \sqrt{x^2-(x+y)}\sqrt[3]{x-y} = y\,(1) \\ 2(x^2+y^2) - 3\sqrt{2x-1} = 11\,(2) \end{cases}$

Từ (1) suy ra $y \geq 0$, vì nếu *y<0* thì *x-y>0*, do đó VT(1) > VP( 1)

$$(1) \Leftrightarrow \sqrt{x^2-(x+y)}\left(\sqrt[3]{x-y} - 1\right) + \left(\sqrt{x^2-(x+y)} - y\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2-(x+y)}\,\frac{x-y-1}{\sqrt[3]{(x-y)^2} + \sqrt[3]{x-y} + 1} + \frac{x^2-x-y-y^2}{\sqrt{x^2-x-y} + y} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-y-1)\left[\frac{\sqrt{x^2-(x+y)}}{\sqrt[3]{(x-y)^2}+\sqrt[3]{x-y}+1}+\frac{x+y}{\sqrt{x^2-x-y}+y}\right]=0 \Leftrightarrow x-y-1=0$$

Thế $y=x-1$ vào phương trình (2) ta được:

$$4x^2-4x+2-3\sqrt{2x-1}=11 \Leftrightarrow (2x-1)^2-3\sqrt{2x-1}-10=0$$

Đặt $t=\sqrt{2x-1}, t\geq 0$, ta có $t^4-3t-10=0 \Leftrightarrow (t-2)(t^3+2t^2+4t+5)=0 \Leftrightarrow t=2$

Khi đó $\sqrt{2x-1}=2 \Leftrightarrow x=\frac{5}{2} \Rightarrow y=\frac{3}{2}$. Vậy hệ phương trình có nghiệm $(x;y)=\left(\frac{5}{2};\frac{3}{2}\right)$.

**Bài 81: Giải hệ phương trình:** $\begin{cases}(x-y)(x^2+xy+y^2+3)=3(x^2+y^2)+2\\ 4\sqrt{x+2}+\sqrt{16-3y}=x^2+8\end{cases}$.

**Lần 2 – THPT NGUYỄN HUỆ - KHÁNH HÒA**

**Lời giải tham khảo**

ĐK: $x\geq -2, y\leq \frac{16}{3}$

$(1)\Leftrightarrow (x-1)^3=(y+1)^3 \Leftrightarrow y=x-2$ Thay $y=x-2$ vao (2) được

$$4\sqrt{x+2}+\sqrt{22-3x}=x^2+8 \Leftrightarrow \frac{4(x-2)}{\sqrt{x+2}+2}=(x-2)(x+2)+\frac{3(x-2)}{\sqrt{22-3x}+4}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2\\ \frac{-4}{\sqrt{x+2}+2}+(x+2)+\frac{3}{\sqrt{22-3x}+4}=0(*)\end{array}\right.$$

Xét *f*(*x*)=VT(*) trên [-2;21/3],có *f'*(*x*)>0 nên hàm số đồng biến. suy ra *x*=-1 là nghiệm duy nhất của (*)

KL: HPT có 2 nghiệm (2;0),(-1;-3)

**Bài 82: Giải hệ phương trình:** $\begin{cases}3x^2+2xy+2y^2-3x-2y=0\\ 5x^2+2xy+5y^2-3x-3y-2=0\end{cases}$.

**Lần 1 – THPT CHUYÊN NGUYỄN QUANG DIỆU**

**Lời giải tham khảo**

Nhân hai vế của phương trình (1) với 3 rồi trừ theo vế cho (2), ta được phương trình:

$$4x^2+4xy+y^2-6x+3y+2=0$$

$$\Leftrightarrow (2x+y)^2-3(2x+y)+2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}2x+y=1\\ 2x+y=2\end{array}\right..$$

Nếu $2x+y=1$ thì $y=1-2x$, thay vào (1) ta được:

$$7x^2-5x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=0\Rightarrow y=1\\ x=\frac{5}{7}\Rightarrow y=-\frac{3}{7}\end{array}\right.$$

Nếu $2x+y=2$ thì $y=2-2x$, thay vào (1) ta được:

$$7x^2-11x+4=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=1\Rightarrow y=0\\ x=\frac{4}{7}\Rightarrow y=\frac{6}{7}\end{array}\right.$$

Vậy hệ phương trình đã cho có 4 nghiệm là $(0;1);(1;0);\left(\frac{5}{7};-\frac{3}{7}\right);\left(\frac{4}{7};\frac{6}{7}\right)$.

**Bài 83: Giải hệ phương trình:** $\begin{cases} xy+2=y\sqrt{x^2+2} \\ y^2+(2x+3)\sqrt{x^2+2x+3}=y+2x^2-5x. \end{cases}$.

**Lần 1 – THPT NGUYỄN SIÊU**

**Lời giải tham khảo**

Từ phương trình (1) của hệ ta có

$xy+2=y\sqrt{x^2+2} \Leftrightarrow y(\sqrt{x^2+2}-x)=2 \Leftrightarrow y=\frac{2}{\sqrt{x^2+2}-x}=\sqrt{x^2+2}+x$

$(do\sqrt{x^2+2}>|x|\geq x)$

Thế vào (2) ta có

$2x^2+2+2x\sqrt{x^2+2}+(2x+3)\sqrt{x^2+2x+3}=x+\sqrt{x^2+2}+2x^2-5x$

$\Leftrightarrow [2(x+1)+1]\sqrt{(x+1)^2+2}+2(x+1)=(1-2x)\sqrt{(-x)^2+2}+2(-x)$ (3) ◎Xét hàm số

$f(t)=(2t+1)\sqrt{t^2+2}+2t,\quad f'(t)=2\sqrt{t^2+2}+(2t+1)\frac{t}{\sqrt{t^2+2}}+2>0\,\forall t$

Xét hàm số $f(t)=(2t+1)\sqrt{t^2+2}+2t,\quad f'(t)=2\sqrt{t^2+2}+(2t+1)\frac{t}{\sqrt{t^2+2}}+2>0\,\forall t$

Suy ra hàm số f(t) đồng biến trên R◎Phương trình (3) $\Leftrightarrow f(x+1)=f(-x)\Leftrightarrow x+1=-x\Leftrightarrow x=\frac{1}{2}$

Phương trình (3) $\Leftrightarrow f(x+1)=f(-x)\Leftrightarrow x+1=-x\Leftrightarrow x=\frac{1}{2}$

Từ đó ta tìm được y=1

Vậy hệ có nghiệm (x;y)=($\frac{1}{2}$; 1)

**Bài 84: Giải hệ phương trình:** $\begin{cases} y^3+5y^2+y+5=8xy^2+8x^2-xy+3x \\ 4x^2-5x+\sqrt{3x+1}-y=0 \end{cases}(x,y\in\mathbb{R})$.

**Lần 2 – THPT NGUYỄN SIÊU**

**Lời giải tham khảo**

Điều kiện $x\geq -\frac{1}{3}(*)$

Phương trình $(1)\Leftrightarrow (y^2+x+1)(y-8x+5)=0$◎$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y^2+x+1=0 \\ y=8x-5 \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y^2+x+1=0 \\ y=8x-5 \end{array}\right.$

*) $y^2+x+1=0$ kết hợp với điều kiện $x\geq -\frac{1}{3}$ dẫn tới phương trình vô nghiệm.

*) $y=8x-5$

Thay vào $(2)$ ta được phương trình:

$$4x^2+\sqrt{3x+1}-13x+5=0 \Leftrightarrow (2x-3)^2=-\sqrt{3x+1}+x+4(5)$$

Xét phương trình $(5)$: Đặt $\sqrt{3x+1}=-(2t-3), t\le \frac{3}{2}$

Kết hợp với phương trình $(5)$ ta có hệ:

$\begin{cases}(2x-3)^2=2t+x+1\\(2t-3)^2=3x+1\end{cases} \Rightarrow (x-t)(2x+2t-5)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}t=x\\2t=5-2x\end{array}\right.$ ◎*) Với $t=x$ ta được

$$\sqrt{3x+1}=3-2x \Leftrightarrow \begin{cases}x\le \frac{3}{2}\\4x^2-15x+8=0\end{cases} \Leftrightarrow x=\frac{15-\sqrt{97}}{8}$$

*) Với $t=x$ ta được $\sqrt{3x+1}=3-2x \Leftrightarrow \begin{cases}x\le \frac{3}{2}\\4x^2-15x+8=0\end{cases} \Leftrightarrow x=\frac{15-\sqrt{97}}{8}$

Khi đó $y=10-\sqrt{97}$

*) Với $2t=5-2x$ ta được $\sqrt{3x+1}=2x-2 \Leftrightarrow \begin{cases}x\ge 1\\4x^2-11x+3=0\end{cases} \Leftrightarrow x=\frac{11+\sqrt{73}}{8}$

Khi đó $y=6+\sqrt{73}$

Kiểm tra các nghiệm trên đều thỏa mãn.

Vậy hệ đã cho có nghiệm $(x;y)$ là $\left(\frac{15-\sqrt{97}}{8};10-\sqrt{97}\right);\left(\frac{11+\sqrt{73}}{8};6+\sqrt{73}\right)$

**Bài 85: Giải hệ phương trình:** $\begin{cases}2\sqrt{4x+4y+1}-\sqrt{5x+y+1}=\sqrt{3x+7y+1}\\(3x+2)\sqrt{9y+1}+4\sqrt{x}=14x\sqrt{3y}\end{cases}$.

**Lần 1 – THPT NGUYỄN TRÃI - KONTUM**

**Lời giải tham khảo**

* ĐK : $x\ge 0, y\ge 0$

* Đặt $a=\sqrt{5x+y+1},\ b=\sqrt{3x+7y+1},\quad a,b>0$

Từ (1) $\Rightarrow \sqrt{2a^2+2b^2}=a+b \Leftrightarrow (a-b)^2=0 \Leftrightarrow a=b$

$\Rightarrow \sqrt{5x+y+1}=\sqrt{3x+7y+1} \Leftrightarrow x=3y$

* Thay vào (2) được : $(3x+2)\sqrt{3x+1}+4\sqrt{x}=14x\sqrt{x}$ (3)

Vì x = 0 không phải là nghiệm của (3) nên :

(3) $\Leftrightarrow \left(3+\frac{2}{x}\right)\sqrt{3+\frac{1}{x}}+\frac{4}{x}=14$ ◎Đặt $u=\sqrt{3+\frac{1}{x}} \Rightarrow \frac{1}{x}=u^2-3,\quad u>\sqrt{3}$

Đặt $u=\sqrt{3+\frac{1}{x}} \Rightarrow \frac{1}{x}=u^2-3,\quad u>\sqrt{3}$

Từ (3) ta có pt : $2u^3+4u^2-3u-26=0 \Leftrightarrow u=2$ (nhận)

* u = 2 $\Rightarrow \sqrt{3+\frac{1}{x}}=2 \Leftrightarrow x=1 \Rightarrow y=3$

Thử lại => hệ có một nghiệm là (1 ; 3)

**Bài 86: Giải hệ phương trình:** $\begin{cases} 4x^2+y-x-9=\sqrt{3x+1}+\sqrt{x^2+5x+y-8} \\ x\sqrt{12-y}+\sqrt{y(12-x^2)}=12 \end{cases}$.

**Lần 1 – THPT NGUYỄN VIẾT XUÂN**

**Lời giải tham khảo**

Điều kiện: $\begin{cases} x\ge -\frac{1}{3} \\ y\le 12 \\ y(12-x^2)\ge 0 \\ x^2+5x+y-8\ge 0 \end{cases}$ $(*)$

Ta có

$(2)\Leftrightarrow \sqrt{y(12-x^2)}=12-x\sqrt{12-y}\Leftrightarrow \begin{cases} x\sqrt{12-y}\le 12 \\ 12x^2-24x\sqrt{12-y}+12(12-y) \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x\sqrt{12-y}\le 12 \\ \left(x-\sqrt{12-y}\right)^2=0 \end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} y=12-x^2 \\ -\frac{1}{3}\le x\le 2\sqrt{3};\ 0\le y\le 12 \end{cases}$

Thay vào phương trình $(1)$ ta được: $3x^2-x+3=\sqrt{3x+1}+\sqrt{5x+4}$

$\Leftrightarrow 3(x^2-x)+\left(x+1-\sqrt{3x+1}\right)+\left(x+2-\sqrt{5x+4}\right)=0$

$\Leftrightarrow (x^2-x)\left(3+\frac{1}{x+1+\sqrt{3x+1}}+\frac{1}{x+2+\sqrt{5x+4}}\right)=0$

$\Leftrightarrow x^2-x=0\Leftrightarrow x=0$ hoặc $x=1$. Khi đó ta được nghiệm $(x;y)$ là $(0;12)$ và $(1;11)$.

**Bài 87: Giải phương trình:** $x^2+9+\log_2\frac{16x^2+208x+96}{\sqrt{12x+16}+\sqrt{45x+81}}=2\sqrt{3x+4}-6x+3\sqrt{5x+9}$.

**Lần 1– THPT NGUYỄN VĂN TRỖI**

**Lời giải tham khảo**

ĐK : $x\ge -\frac{4}{3}$ ta có : $x^2+9+\log_2\frac{16x^2+208x+96}{\sqrt{12x+16}+\sqrt{45x+81}}=2\sqrt{3x+4}-6x+3\sqrt{5x+9}$

$\Leftrightarrow x^2+6x+13+\log_2(x^2+6x+13)=2\sqrt{3x+4}+3\sqrt{5x+9}+\log_2\left(2\sqrt{3x+4}+3\sqrt{5x+9}\right)$

$f(x^2+6x+13)=f\left(\sqrt{3x+4}+3\sqrt{5x+9}\right)(*)$

Xét hàm số : $f(t)=t+\log_2 t,(t>0)=>f'(t)=1+\frac{1}{t\ln 2}>0,\forall t>0$ nên hàm số $f(t)=t+\log_2 t$ đồng biến trên $(0;+\infty)$. Từ (*) suy ra $x^2+6x+13=\sqrt{3x+4}+3\sqrt{5x+9}$

$x^2+x+2\left[(x+2)-\sqrt{3x+4}\right]+3\left[(x+3)-\sqrt{5x+9}\right]=0$

$(x^2+x)+\frac{2(x^2+x)}{x+2+\sqrt{3x+4}}+\frac{3(x^2+x)}{x+3+\sqrt{5x+9}}=0\Leftrightarrow (x^2+x)\left(1+\frac{2}{x+2+\sqrt{3x+4}}+\frac{3}{x+3+\sqrt{5x+9}}\right)=0$

$\Leftrightarrow x^2+x=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=-1 \end{array}\right.$ (Do $1+\frac{2}{x+2+\sqrt{3x+4}}+\frac{3}{x+3+\sqrt{5x+9}}>0,\forall x>-\frac{3}{4}$)

Đối chiếu với điều kiện ban đầu suy ra phương trình có nghiệm : $x=0;x=-1$

**Bài 88: Giải hệ phương trình:** $\begin{cases}(4y-1)\sqrt{x^2+1}=2x^2+2y+1\\ x^4+x^2y+y^2=1\end{cases}$.

**Lần 1 – THPT NHƯ XUÂN**

**Lời giải tham khảo**

Xét phương trình: (4y-1) $\sqrt{x^2+1}=2x^2+2y+1$

Đặt: t = $\sqrt{x^2+1}\ge 1$, ta được pt: $2t^2-(4y-1)t+2y-1=0$

Giải ra được: $\left[\begin{array}{l}t=\frac{1}{2}<1(loai)\\ t=2y-1\end{array}\right.\Rightarrow\begin{cases}y\ge 1\\ x^2=4y^2-4y\end{cases}$ thay vào pt (2) ta được: $16y^2(y-1)^2+4y^2(y-1)$ $+y^2-1=0$

$\Rightarrow\begin{cases}y\ge 1\\ x^2=4y^2-4y\end{cases}$ thay vào pt (2) ta được: $16y^2(y-1)^2+4y^2(y-1)+y^2-1=0$

$\Leftrightarrow$ y = 1(do y ≥ 1) $\Rightarrow$ x = 0

Vậy nghiệm của phương trình là $\begin{cases}x=0\\ y=1\end{cases}$.

**Bài 89: Giải hệ phương trình:** $\begin{cases}(x+3y+1)\sqrt{2xy+2y}=y(3x+4y+3)\\ \left(\sqrt{x+3}-\sqrt{2y-2}\right)\left(x-3+\sqrt{x^2+x+2y-4}\right)=4\end{cases}$.

**Lần 1 – THPT PHẠM VĂN ĐỒNG**

**Lời giải tham khảo**

▪ Điều kiện: $\begin{cases}x\ge -1\\ y\ge 1\\ x^2+x+2y-4\ge 0\end{cases}$

▪ Đặt $a=\sqrt{2(x+1)};b=\sqrt{y};(a,b\ge 0)$ thay vào phương trình (1) của hệ phương trình ta được:

$(a-2b)\left(a^2-ab+4b^2\right)=0\Leftrightarrow a=2b\Leftrightarrow 2y=x+1$. Thay vào pt(2) ta được:

$\left(\sqrt{x+3}-\sqrt{x-1}\right)\left(x-3+\sqrt{x^2+2x-3}\right)=4$

$\Leftrightarrow x-3+\sqrt{x^2+2x-3}=\sqrt{x+3}+\sqrt{x-1}$

Đặt $t=\sqrt{x+3}+\sqrt{x-1};t\ge 0$ ta có pt: $t^2-2t-8=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=-2\quad(L)\\ t=4\quad(N)\end{array}\right.$

Với $t=4$ giải ra ta được $(x;y)=\left(\frac{13}{4};\frac{17}{8}\right)$ là nghiệm của hệ.

**Bài 90: Giải hệ phương trình:** $\begin{cases}xy+2=y\sqrt{x^2+2}\\ y^2+2(x+1)\sqrt{x^2+2x+3}=2x^2-4x\end{cases}$.

**Lần 1 – THPT PHAN BỘI CHÂU**

**Lời giải tham khảo**

Vì $\sqrt{x^2+2}-x>\sqrt{x^2}-x=|x|-x\ge 0,\forall x\in R$

$\Rightarrow \sqrt{x^2+x}-x>0,\forall x\in R$

Nên (1) $\Leftrightarrow y(\sqrt{x^2+2}-x)=2\Leftrightarrow y=\dfrac{2}{\sqrt{x^2+2}-x}=\sqrt{x^2+2}+x$ ◎Thế $y=\sqrt{x^2+2}+x$ vào (2) :

Thế $y=\sqrt{x^2+2}+x$ vào (2) :

$\left(\sqrt{x^2+2}+x\right)^2+2(x+1)\sqrt{x^2+2x+3}=2x^2-4x\Leftrightarrow 1+x\sqrt{x^2+2}+2x+(x+1)\sqrt{x^2+2x+3}=0$

$\Leftrightarrow (x+1)\left[1+\sqrt{(x+1)^2+2}\right]=(-x)\left[1+\sqrt{(-x)^2+2}\right]$ (*)

Xét hàm số $f(t)=t(1+\sqrt{t^2+2})$

$f'(t)=1+\sqrt{t^2+2}+\dfrac{t^2}{\sqrt{t^2+2}}>0,\forall t\in R\Rightarrow f$ đồng biến trên $R$.

$(*)\Leftrightarrow f(x+1)=f(-x)\Leftrightarrow x+1=-x\Leftrightarrow x=\dfrac{-1}{2}$

Với $x=\dfrac{-1}{2}$ thì $y=1$. Vậy nghiệm của hệ phương trình là $\left(-\dfrac{1}{2};1\right)$.

**Bài 91: Giải hệ phương trình:** $\begin{cases}2\sqrt{x^2+5}=2\sqrt{2y}+x^2\\ x+3\sqrt{xy+x-y^2-y}=5y+4\end{cases}$.

**Lần 2 – THPT PHAN BỘI CHÂU**

**Lời giải tham khảo**

**ĐIỀU KIỆN:** $\left(xy+x-y^2-y\ge 0\ ,\ y\ge 0\right)$

$(2)\Leftrightarrow x-2y-1+3\left(\sqrt{xy+x-y^2-y}-y-1\right)=0$

$\Leftrightarrow (x-2y-1)\left[1+\dfrac{3(y+1)}{\sqrt{xy+x-y^2-y}+y+1}\right]=0$

$\Leftrightarrow x-2y-1=0\ \left(1+\dfrac{3(y+1)}{\sqrt{xy+x-y^2-y}+y+1}>0\right)$

Thế $2y=x-1$ vào (1) ta được :

$2\sqrt{x^2+5}=2\sqrt{x-1}+x^2\Leftrightarrow 2\left(\sqrt{x^2+5}-3\right)=2\left(\sqrt{x-1}-1\right)+x^2-4$

$\Leftrightarrow (x-2)\left[\dfrac{x+2}{\sqrt{x^2+5}+3}-\dfrac{2}{\sqrt{x-1}+1}-(x+2)\right]=0\ (3)$

Vì $x\ge 1$ nên $\dfrac{x+2}{\sqrt{x^2+5}+3}-\dfrac{2}{\sqrt{x-1}+1}-(x+2)=(x+2)\left(\dfrac{1}{\sqrt{x^2+5}+3}-1\right)-\dfrac{2}{\sqrt{x-1}+1}<0$

$(3) \Leftrightarrow x = 2$ Vậy nghiệm của hệ phương trình là : $\left(2;\frac{1}{2}\right)$

**Bài 92: Giải hệ phương trình:** $\begin{cases}(xy-3)\sqrt{y+2}+\sqrt{x}=\sqrt{x^5}+(y-3x)\sqrt{y+2}\\ \sqrt{9x^2+16}-2\sqrt{2y+8}=4\sqrt{2-x}\end{cases}$.

**Lần 1 – THPT PHAN THÚC TRỰC**

**Lời giải tham khảo**

Đk: $\begin{cases}0\le x\le 2\\ y\ge -2\end{cases}$ (*).Với đk(*) ta có

$(1) \Leftrightarrow (x-1)\left[(y+3)\sqrt{y+2}-(x+1)\sqrt{x}\right]=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=1\\ (y+3)\sqrt{y+2}=(x+1)\sqrt{x} \quad (3)\end{array}\right.$

Với x = 1 thay vào (2) ta được: $2\sqrt{2y+8}=1 \Leftrightarrow y=-\frac{31}{8}(loai)$

Ta có: $(3) \Leftrightarrow \left(\sqrt{y+2}\right)^3+\sqrt{y+2}=(\sqrt{x})^3+\sqrt{x}$ (4). Xét hàm số

$f(t)=t^3+t \Rightarrow f'(t)=3t^2+1>0;\forall t \Rightarrow$ Hàm số f(t) là hs đồng biến, do

đó:◎$(4) \Leftrightarrow f(\sqrt{y+2})=f(\sqrt{x}) \Leftrightarrow \sqrt{y+2}=\sqrt{x} \Leftrightarrow y=x-2$ thay vào pt(2) ta được:

$(4) \Leftrightarrow f(\sqrt{y+2})=f(\sqrt{x}) \Leftrightarrow \sqrt{y+2}=\sqrt{x} \Leftrightarrow y=x-2$ thay vào pt(2) ta được:

$4\sqrt{2-x}+2\sqrt{2x+4}=\sqrt{9x^2+16}$

$\Leftrightarrow 32-8x+16\sqrt{2(4-x^2)}=9x^2 \Leftrightarrow 8(4-x^2)+16\sqrt{2(4-x^2)}-(x^2+8x)=0$

Đặt: $t=\sqrt{2(4-x^2)}$ $(t\ge 0)$; PT trở thành: $4t^2+16t-(x^2+8x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}t=\frac{x}{2}\\ t=-\frac{x}{2}-4<0(loai)\end{array}\right.$

Hay $\sqrt{2(4-x^2)}=\frac{x}{2} \Leftrightarrow \begin{cases}0\le x\le 2\\ x^2=\frac{32}{9}\end{cases} \Leftrightarrow x=\frac{4\sqrt{2}}{3} \Rightarrow y=\frac{4\sqrt{2}-6}{3}$

Vậy hệ pt có nghiệm (x; y) là: $\left(\frac{4\sqrt{2}}{3};\frac{4\sqrt{2}-6}{3}\right)$

**Bài 93: Giải hệ phương trình:** $\frac{5x-13-\sqrt{57+10x-3x^2}}{\sqrt{x+3}-\sqrt{19-3x}}+2\sqrt{x+3}\ge x^2+2x+9$.

**Lần 1 – THPT PHÙ CỪ**

**Lời giải tham khảo**

Điều kiện $\begin{cases}-3\le x\le \frac{19}{3}\\ x\ne 4\end{cases}$

Bất phương trình tương đương

$\frac{\left(\sqrt{x+3}-\sqrt{19-3x}\right)\left(2\sqrt{x+3}+\sqrt{19-3x}\right)}{\sqrt{x+3}-\sqrt{19-3x}}+2\sqrt{x+3}\ge x^2+2x+9$◎

$\Leftrightarrow 4\sqrt{x+3}+\sqrt{19-3x}\ge x^2+2x+9$

$$\Leftrightarrow 4\left(\sqrt{x+3}-\frac{x+5}{3}\right)+\left(\sqrt{19-3x}-\frac{13-x}{3}\right)\ge x^2+x-2$$

$$\Leftrightarrow \frac{4\left(-x^2-x+2\right)}{9\left(\sqrt{x+3}+\frac{x+5}{3}\right)}+\frac{-x^2-x+2}{9\left(\sqrt{19-3x}+\frac{13-x}{3}\right)}\ge x^2+x-2$$

$$\Leftrightarrow \left(x^2+x-2\right)\left[\frac{4}{9\left(\sqrt{x+3}+\frac{x+5}{3}\right)}+\frac{1}{9\left(\sqrt{19-3x}+\frac{13-x}{3}\right)}\right]\le 0 \qquad (*)$$

Vì $\frac{4}{9\left(\sqrt{x+3}+\frac{x+5}{3}\right)}+\frac{1}{9\left(\sqrt{19-3x}+\frac{13-x}{3}\right)}>0$ với mọi $x\in\left[-3;\frac{19}{3}\right]\setminus\{4\}$

Do đó $(*)\Leftrightarrow x^2+x-2\le 0\Leftrightarrow -2\le x\le 1$ (thoả mãn)

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S=[-2;1]$.

**Bài 94: Giải bất phương trình:** $\sqrt{2x^4-6x^3+10x^2-6x+8}-\sqrt{x^3+x}\le\sqrt{x^2+1}(x-2)$.

**Lần 1 – THPT phú riềng**

**Lời giải tham khảo**

Điều kiện : $\begin{cases}2x^4-6x^3+10x^2-6x+8\ge 0\\ x^3+x\ge 0\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}\left(x^2+1\right)\left(2x^2-6x+8\right)\ge 0\\ x\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow x\ge 0$ Khi đó

(1) $\Leftrightarrow\sqrt{x^2+1}\sqrt{2x^2-6x+8}-\sqrt{x^2+1}\sqrt{x}-\sqrt{x^2+1}(x-2)\le 0$

Khi đó (1) $\Leftrightarrow\sqrt{x^2+1}\sqrt{2x^2-6x+8}-\sqrt{x^2+1}\sqrt{x}-\sqrt{x^2+1}(x-2)\le 0$

$\Leftrightarrow\sqrt{x^2+1}\left(\sqrt{2x^2-6x+8}\right)-\sqrt{x}-x+2\le 0$

$\Leftrightarrow\sqrt{2x^2-6x+8}-\sqrt{x}-x+2\le 0$ (2) Xét TH1 : Với $x=0$ khi đó (2) vô nghiệm

Xét TH1 : Với $x=0$ khi đó (2) vô nghiệm

Xét TH2 : Với x>0, chia hai vế của (2) cho $\sqrt{x}$ ta được :

$$\sqrt{2\left(x+\frac{4}{x}\right)-6}-1-\left(\sqrt{x}-\frac{2}{\sqrt{x}}\right)\le 0\Leftrightarrow\sqrt{2\left(x+\frac{4}{x}\right)-6}\le\left(\sqrt{x}-\frac{2}{\sqrt{x}}\right)+1 \quad (3)$$

Đặt $t=\sqrt{x}-\frac{2}{\sqrt{x}}\Rightarrow x+\frac{4}{x}=t^2+4$, thay vào (3) ta được :

$$\sqrt{2t^2+2}\le t+1\Leftrightarrow\begin{cases}t\ge -1\\ t^2-2t+1\le 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t\ge -1\\ (t-1)^2\le 0\end{cases}\Leftrightarrow t=1$$ Với $t=1$ ta có :

$$\sqrt{x}-\frac{2}{\sqrt{x}}=1\Leftrightarrow x-\sqrt{x}-2=0\left[\begin{array}{l}\sqrt{x}=-1 (vn)\\ \sqrt{x}=2\Rightarrow x=4\end{array}\right.$$

Với $t=1$ ta có : $\sqrt{x}-\frac{2}{\sqrt{x}}=1 \Leftrightarrow x-\sqrt{x}-2=0 \left[\begin{array}{l}\sqrt{x}=-1(vn)\\ \sqrt{x}=2 \Rightarrow x=4\end{array}\right.$

Kết hợp hai trường hợp và điều kiện ta thấy bất phương trình (1) có nghiệm x=4

**Bài 95: Giải hệ phương trình:** $\begin{cases}\sqrt{x+y}-\sqrt{x-y}=2\\ \sqrt{x^2+y^2+1}=3+\sqrt{x^2-y^2}\end{cases}$.

**Lần 2 – THPT phú riềng**

**Lời giải tham khảo**

Điều kiện: $x+y\geq 0,\ x-y\geq 0$

Đặt: $\begin{cases}u=x+y\\ v=x-y\end{cases}$ ta có hệ: $\begin{cases}\sqrt{u}-\sqrt{v}=2\ (u>v)\\ \sqrt{\frac{u^2+v^2+2}{2}}-\sqrt{uv}=3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}u+v=2\sqrt{uv}+4\\ \sqrt{\frac{u^2+v^2+2}{2}}-\sqrt{uv}=3\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}u+v=2\sqrt{uv}+4 & (1)\\ \sqrt{\frac{(u+v)^2-2uv+2}{2}}-\sqrt{uv}=3\ (2)\end{cases}$. Thế (1) vào (2) ta có:

$\sqrt{uv+8\sqrt{uv}+9}-\sqrt{uv}=3 \Leftrightarrow uv+8\sqrt{uv}+9=(3+\sqrt{uv})^2 \Leftrightarrow uv=0$.

Kết hợp (1) ta có: $\begin{cases}uv=0\\ u+v=4\end{cases} \Leftrightarrow u=4,\ v=0$ (vì $u>v$).

Từ đó ta có: $x=2$; $y=2$.(Thỏa đ/k)

KL: Vậy nghiệm của hệ là: $(x;\ y)=(2;\ 2)$.

**Bài 96: Giải phương trình:** $\frac{x^2+2x-8}{x^2-2x+3}=(x+1)\left(\sqrt{x+2}-2\right)$.

**Lần 3 – THPT PHÚ RIỀNG**

**Lời giải tham khảo**

ĐK: $x\geq -2$

Pt $\Leftrightarrow \frac{(x-2)(x+4)}{x^2-2x+3}=\frac{(x+1)(x-2)}{\sqrt{x+2}+2} \Rightarrow \left[\begin{array}{l}x=2\\ \frac{x+4}{x^2-2x+3}=\frac{x+1}{\sqrt{x+2}+2}\end{array}\right.$ (1)

(1) $\Leftrightarrow (x+4)\left(\sqrt{x+2}+2\right)=(x+1)\left(x^2-2x+3\right)$

$\Leftrightarrow \left(\sqrt{x+2}+2\right)\left[\left(\sqrt{x+2}\right)^2+2\right]=\left[(x-1)+2\right]\left[(x-1)^2+2\right]$ (2)

Xét pt $=(t+2)\left(t^2+2\right)$ có pt $f'(t)=3t^2+4t+2>0 \forall t\in\mathbb{R}$

Vậy f(t) đồng biến trên $\mathbb{R}$

Do đó: (2) $\Leftrightarrow f\left(\sqrt{x+2}\right)=f(x-1) \Leftrightarrow \sqrt{x+2}=x-1 \Leftrightarrow \begin{cases}x\geq 1\\ x^2-3x-1=0\end{cases} \Leftrightarrow x=\frac{3+\sqrt{13}}{2}$

Vậy pt có nghiệm: $x=2,\ x=\frac{3+\sqrt{13}}{2}$

**Bài 97: Giải hệ phương trình:** $\begin{cases}2x^2=1+5xy+y^2\\ y\left(\sqrt{y(x-2y)}+\sqrt{y(4y-x)}\right)=1\end{cases}(x,\ y\in\mathbb{R})$..

**Lần 2 – THPT QUẢNG HÀ**

**Lời giải tham khảo**

Điều kiện $4y \ge x \ge 2y \ge 0$

Trừ vế với vế ta được : $2x^2 - 5xy - y^2 - y(\sqrt{xy - 2y^2} + \sqrt{4y^2 - xy}) = 0$

Nhận thấy y=0 không thỏa mãn hệ.

Do y>0 ta chia hai vế của phương trình cho $y^2$ ta có

$$2\left(\frac{x}{y}\right) - 5\frac{x}{y} - 1 - \sqrt{\frac{x}{y} - 2} - \sqrt{4 - \frac{x}{y}} = 0$$

Đặt $\frac{x}{y} = t \Rightarrow t \in [2;4]$. Khi đó ta được: $2t^2 - 5t - 1 - \sqrt{t-2} - \sqrt{4-t} = 0$

$\Leftrightarrow 2t^2 - 6t + \sqrt{t-2}(\sqrt{t-2} - 1) + (1 - \sqrt{4-t}) = 0$

$\Leftrightarrow 2\,t(t-3) + \dfrac{(t-3)\sqrt{t-2}}{\sqrt{t-2}+1} + \dfrac{t-3}{1+\sqrt{4-t}} = 0$

$\Leftrightarrow (t-3)\left(2t + \dfrac{\sqrt{t-2}}{\sqrt{t-2}+1} + \dfrac{1}{1+\sqrt{4-t}}\right) = 0$

Ta thấy $\left(2t + \dfrac{\sqrt{t-2}}{\sqrt{t-2}+1} + \dfrac{1}{1+\sqrt{4-t}}\right) > 0, \forall t \in [2;4]$.

Vậy t=3 suy ra x=3y thế vào phương trình (1) của hệ ta được $2y^2 = 1 \Rightarrow y = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow x = \dfrac{3}{\sqrt{2}}$

$2y^2 = 1 \Rightarrow y = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow x = \dfrac{3}{\sqrt{2}}$

Kết luận hệ phương trình có nghiệm $(x;y) = \left(\dfrac{3}{\sqrt{2}}; \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$

**Bài 98: Giải hệ phương trình:** $\begin{cases} (x-2).\sqrt{1+\dfrac{3x}{y}} = 2x - y \\ y^2\sqrt{1+\dfrac{3x}{y}} = 2x^2 + y^2 - 4x \end{cases}$.

**Lần 1 – THPT QUỐC OAI**

**Lời giải tham khảo**

Điều kiện: $y \ne 0; 1 + \dfrac{3x}{y} \ge 0$.

Hệ phương trình $\begin{cases} (x-2).\sqrt{1+\dfrac{3x}{y}} = 2x - y \quad (1) \\ y^2\sqrt{1+\dfrac{3x}{y}} = 2x^2 + y^2 - 4x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(\dfrac{x}{y} - \dfrac{2}{y}\right).\sqrt{1+\dfrac{3x}{y}} = \dfrac{2x}{y} - 1 \\ \sqrt{1+\dfrac{3x}{y}} = 2\left(\dfrac{x}{y}\right)^2 + 1 - \dfrac{4x}{y^2} \end{cases}$

Đặt: $\begin{cases} a = \dfrac{x}{y} \\ b = \dfrac{1}{y} \end{cases}$. Khi đó ta có được hệ: $\begin{cases} (a-2b)\sqrt{1+3a} = 2a - 1 \\ \sqrt{1+3a} = 2a^2 - 4ab + 1 \end{cases}$

Cộng theo vế hai phương trình cho nhau, ta được:

$$(a-2b+1)\sqrt{1+3a}=2a^2+2a-4ab$$
$$\Leftrightarrow (a-2b+1)\left(\sqrt{1+3a}-2a\right)=0$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a+1=2b \\ \sqrt{1+3a}=2a \end{array}\right.$$

Với $a+1=2b \Leftrightarrow \dfrac{x}{y}+1=\dfrac{2}{y} \Leftrightarrow x+y=2$.

Thế vào (1) ta được:

$$-y\sqrt{1+\frac{3(2-y)}{y}}=2(2-y)-y \Leftrightarrow -\sqrt{1+\frac{3(2-y)}{y}}=\frac{2(2-y)}{y}-1$$

$$\Leftrightarrow 4\left(\frac{2-y}{y}\right)^2-7\frac{2-y}{y}=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \dfrac{2-y}{y}=0 \\ \dfrac{2-y}{y}=\dfrac{7}{4} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=2 \Rightarrow x=0 \\ y=\dfrac{8}{11} \Rightarrow x=\dfrac{14}{11} \end{array}\right.$$

Thay $y=\dfrac{8}{11}; x=\dfrac{14}{11}$ vào hệ, không thỏa mãn.

Với $\sqrt{1+3a}=2a \Leftrightarrow \begin{cases} a\ge 0 \\ 4a^2-3a-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow a=1 \Leftrightarrow x=y$

Khi đó: $(1)\Leftrightarrow 2(x-2)=x \Leftrightarrow x=4; y=4$

Hệ phương trình có hai nghiệm: $(x;y)=(0;2);(4;4)$.

**Bài 99: Giải hệ phương trình:** $\begin{cases} 9x^2+9xy+5x-4y+9\sqrt{y}=7 \\ \sqrt{x-y+2}+1=9(x-y)^2+\sqrt{7x-7y} \end{cases}$.

**Lần 1 – THPT QUỲNH LƯU 1**

**Lời giải tham khảo**

Đk : $x \ge y \ge 0$ . Nếu x = y thì (2) vô nghiệm nên x > y

(2) $\Leftrightarrow \sqrt{x-y+2}-\sqrt{7x-7y}+1-[3(x-y)]^2=0$

$$\Leftrightarrow \frac{2-6x+6y}{\sqrt{x-y+2}+\sqrt{7x-7y}}+(1-3x+3y)(1+3x-3y)=0$$

$$\Leftrightarrow (1-3x+3y)\left[\frac{2}{\sqrt{x-y+2}+\sqrt{7x-7y}}+(1+3x-3y)\right]=0$$

$x>y\ge 0$ nên $\left[\dfrac{2}{\sqrt{x-y+2}+\sqrt{7x-7y}}+(1+3x-3y)\right]>0$ suy ra $1-3x+3y=0$

Thay $y=x-\dfrac{1}{3}$ vào phương trình (1) ta được

$$9x^2+9x\left(x-\frac{1}{3}\right)+5x-4\left(x-\frac{1}{3}\right)+9\sqrt{x-\frac{1}{3}}=7$$

$$\Leftrightarrow 18x^2-8x+6x-\frac{8}{3}+9\sqrt{x-\frac{1}{3}}-3=0$$

$$\Leftrightarrow 2x(9x-4)+\frac{2}{3}(9x-4)+3\left(\sqrt{9x-3}-1\right)=0$$

$\Leftrightarrow (9x-4)\left(2x+\frac{2}{3}+\frac{3}{\sqrt{9x-3}+1}\right)=0 \Leftrightarrow x=\frac{4}{9}$ vì x > 0

Với $x=\frac{4}{9}$ thì $y=\frac{1}{9}$. Vậy hệ có nghiệm (x;y) = $\left(\frac{4}{9};\frac{1}{9}\right)$

**Bài 100: Giải hệ phương trình:** $\begin{cases} 2\sqrt{x-2}.\sqrt{y}+2\sqrt{(y+8)x}=y+4x \\ xy+2x-11+\sqrt{12-x+y}+\sqrt{7-3x}=0 \end{cases}$.

**Lần 1 – THPT QUỲNH LƯU 3**

**Lời giải tham khảo**

Điều kiện $2\le x\le\frac{7}{3}, y\ge 0$

Ta có

$2\sqrt{x-2}.\sqrt{y}=\sqrt{4(x-2)}\sqrt{y}\le\frac{4x-8+y}{2}$. Dấu "=" xẩy ra khi y=4x-8

$2\sqrt{(y+8)x}=\sqrt{(y+8)4x}\le\frac{4x+y+8}{2}$. Dấu "=" xẩy ra khi y=4x-8

Suy ra $2\sqrt{x-2}.\sqrt{y}+2\sqrt{(y+8)x}\le y+4x$. Dấu "=" xẩy ra khi y=4x-8

Như vậy, pt(1) $\Leftrightarrow$ y=4x-8. Thế vào pt(2) ta có:

$4x^2-6x-11+\sqrt{4+3x}+\sqrt{7-3x}=0$

$\Leftrightarrow 4\left(x^2-x-3\right)+\left(\sqrt{4+3x}-x-1\right)+\left(\sqrt{7-3x}-x+2\right)=0$

$\Leftrightarrow 4\left(x^2-x-3\right)-\frac{\left(x^2-x-3\right)}{\sqrt{4+3x}+x+1}-\frac{\left(x^2-x-3\right)}{\sqrt{7-3x}+x-2}=0 \left(\text{do } x\in\left[2;\frac{7}{3}\right]\right)$

$\Leftrightarrow \left(x^2-x-3\right)\left[4-\frac{1}{\sqrt{4+3x}+x+1}-\frac{1}{\sqrt{7-3x}+x-2}\right]=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-x-3=0 \quad (*) \\ \frac{1}{\sqrt{4+3x}+x+1}+\frac{1}{\sqrt{7-3x}+x-2}=4 \ (3) \end{array}\right.$

$+\ pt(*) \Leftrightarrow x^2-x-3=0 \Leftrightarrow x=\frac{1+\sqrt{13}}{2} \vee x=\frac{1-\sqrt{13}}{2}$

Đối chiếu điều kiện ta có $x=\frac{1+\sqrt{13}}{2}$, hệ có nghiệm $\left(\frac{1+\sqrt{13}}{2};2\sqrt{13}-6\right)$

+Xét pt(3)

$\forall x\in\left[2;\frac{7}{3}\right]\Rightarrow\sqrt{4+3x}+x+1\ge 3+\sqrt{10}>6\Rightarrow\frac{1}{\sqrt{4+3x}+x+1}<\frac{1}{6}$

Xét hàm số $\forall x\in\left[2;\frac{7}{3}\right): g(x)=\sqrt{7-3x}+x-2\Rightarrow g'(x)=-\frac{3}{2\sqrt{7-3x}}+1=\frac{2\sqrt{7-3x}-3}{2\sqrt{7-3x}}<0$

$\Rightarrow g(x)\ge g\left(\frac{7}{3}\right)=\frac{1}{3}\Rightarrow\frac{1}{\sqrt{7-3x}+x-2}\le 3$

Do đó,

$\forall x \in \left[2;\frac{7}{3}\right]: \frac{1}{\sqrt{4+3x}+x+1}+\frac{1}{\sqrt{7-3x}+x-2} \le \frac{1}{6}+3<4$ hay pt(3) vô nghiệm

Vậy, hệ có nghiệm duy nhất $\left(\frac{1+\sqrt{13}}{2};2\sqrt{13}-6\right)$

**Bài 101: Giải hệ phương trình:** $\begin{cases} x^2+xy(2y-1)=2y^3-2y^2-x \\ 6\sqrt{x-1}+y+7=4x(y-1) \end{cases}$.

**Lần 1 – THPT SỐ 1 BẢO YÊN**

**Lời giải tham khảo**

ĐK: $x \ge 1$.

$(1) \Leftrightarrow (2y^2+x)(1+x-y)=0 \Leftrightarrow y=x+1$ vì $2y^2+x>0, \forall x \ge 1$ Thay vào (2) ta được

$6\sqrt{x-1}+x+8=4x^2 \Leftrightarrow \left(\sqrt{x-1}+3\right)^2=(2x)^2 \Leftrightarrow 2x=\sqrt{x-1}+3$

Thay vào (2) ta được $6\sqrt{x-1}+x+8=4x^2 \Leftrightarrow \left(\sqrt{x-1}+3\right)^2=(2x)^2 \Leftrightarrow 2x=\sqrt{x-1}+3$

$\Leftrightarrow 2x-3=\sqrt{x-1} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x^2-13x+10=0 \\ x \ge \frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x=2 \Rightarrow y=3$

Vậy nghiệm của phương trình là $(x;y)=(2;3)$.

**Bài 102: Giải hệ phương trình:** $\begin{cases} 8\sqrt{2x-1}\left(2x-\sqrt{2x-1}\right)=y\left(y^2-2y+4\right) \\ 4xy+2\sqrt{(y+2)(y+2x)}=5y+12x-6 \end{cases}$ $(x;y\in\mathbb{R})$.

**Lần 2 – THPT SỐ 1 BẢO YÊN**

**Lời giải tham khảo**

ĐK: $\begin{cases} x \ge \frac{1}{2} \\ (y+2)(y+2x) \ge 0 \end{cases}$. Từ pt (1) $\Rightarrow$ để pt có nghiệm thì $y \ge 0$

PT $(1) \Leftrightarrow \left(2\sqrt{2x-1}\right)^3-2\left(2\sqrt{2x-1}\right)^2+4\left(2\sqrt{2x-1}\right)=y^3-2y^2+4y$ (*)

Xét hàm số $f(t)=t^3-2t^2+4t$ $(t \ge 0)$ có $f'(t)=3t^2-4t+4=2t^2+(t-2)^2>0$ $\forall t \ge 0$ nên *f(t)* luôn đồng biến Từ pt (*) $\Rightarrow f\left(2\sqrt{2x-1}\right)=f(y) \Leftrightarrow 2\sqrt{2x-1}=y$

Từ pt (*) $\Rightarrow f\left(2\sqrt{2x-1}\right)=f(y) \Leftrightarrow 2\sqrt{2x-1}=y$

Thay vào pt ( 2 ) ta được pt $y^3+2(y+2)\sqrt{y+2}=3y(y+2)$

Đặt $z=\sqrt{y+2}$ ta được pt $y^3+2z^3=3yz^2 \Leftrightarrow (y-z)\left(y^2+yz-2z^2\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} y=-2z & (loại) \\ y=z & (t/m) \end{array}\right.$

Với y = z ta được $y=\sqrt{y+2} \Rightarrow y=2 \Rightarrow x=1$ $(t/m)$

**Bài 103: Giải hệ phương trình:** $\begin{cases} x^3-7y^3+3xy(x+y)-24y^2+3x-27y=14 \\ \sqrt{3-x}+\sqrt{y+4}=x^3+y^2-5 \end{cases} (x,y\in\mathbb{R})..$

**Lần 1 – THPT SỞ BẮC GIANG**

**Lời giải tham khảo**

Đkxđ $\begin{cases} x\le 3 \\ y\ge -4 \end{cases}$

Từ (1) ta có $(x+y)^3+3(x+y)=(2y+2)^3+3(2y+2)$

$\Leftrightarrow (x-y-2)\left[(x+y)^2+(x+y)(2y+2)+(2y+2)^2+3\right]=0$

$\Leftrightarrow y=x-2$. Suy ra $-2\le x\le 3$.

Thế vào (2) ta được

Thế vào (2) ta được

$\sqrt{x+2}+\sqrt{3-x}=x^3+x^2-4x-1 \Leftrightarrow \sqrt{x+2}-\frac{1}{3}(x+4)+\sqrt{3-x}-\frac{1}{3}(-x+5)=(x^2-x-2)(x+2)$

$\Leftrightarrow (x^2-x-2)\left(3(x+2)+\frac{1}{3\sqrt{x+2}+x+4}+\frac{1}{3\sqrt{3-x}+5-x}\right)=0 \Leftrightarrow (x-2)(x+1)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=-1 \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow (x-2)(x+1)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=-1 \end{array}\right.$

Với $x=2\Rightarrow y=0; x=-1\Rightarrow y=-3$.

KL $(x;y)=(-1;-3),(x;y)=(2;0)$

**Bài 104: Giải hệ phương trình:** $\begin{cases} x^2+\frac{x}{x+1}=(y+2)\sqrt{(x+1)(y+1)} \\ 3x^2-8x-3=4(x+1)\sqrt{y+1} \end{cases} (x,y\in\mathbb{R})$.

**Lần 1 – THPT SỞ VĨNH PHÚC**

**Lời giải tham khảo**

Điều kiện: $\begin{cases} x>-1 \\ y\ge -1 \end{cases}$

$(1)\Leftrightarrow \frac{x^3+x^2+x}{x+1}=(y+2)\sqrt{(x+1)(y+1)} \Leftrightarrow \frac{x^3+x(x+1)}{(x+1)\sqrt{x+1}}=(y+2)\sqrt{y+1}$

$\Leftrightarrow \left(\frac{x}{\sqrt{x+1}}\right)^3+\frac{x}{\sqrt{x+1}}=\left(\sqrt{y+1}\right)^3+\sqrt{y+1}$.

Xét hàm số $f(t)=t^3+t$ trên $\mathbb{R}$ có $f'(t)=3t^2+1>0\forall t\in\mathbb{R}$ suy ra *f(t)* đồng biến trên $\mathbb{R}$. Nên $f\left(\frac{x}{\sqrt{x+1}}\right)=f\left(\sqrt{y+1}\right)\Leftrightarrow \frac{x}{\sqrt{x+1}}=\sqrt{y+1}$. Thay vào (2) ta được $3x^2-8x-3=4x\sqrt{x+1}$.

$\Leftrightarrow (2x-1)^2=\left(x+2\sqrt{x+1}\right)^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2\sqrt{x+1}=x-1 \\ 2\sqrt{x+1}=1-3x \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x\ge 1 \\ x^2-6x-3=0 \end{cases} \\ \begin{cases} x\le \frac{1}{3} \\ 9x^2-10x-3=0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3+2\sqrt{3} \\ x=\frac{5-2\sqrt{13}}{9} \end{array}\right.$

Ta có $y=\frac{x^2}{x+1}-1$

Với $x=3+2\sqrt{3}\Rightarrow y=\frac{4+3\sqrt{3}}{2}$. Với $x=\frac{5-2\sqrt{13}}{9}\Rightarrow y=-\frac{41+7\sqrt{13}}{72}$.

Các nghiệm này đều thỏa mãn điều kiện .

Hệ phương trình có hai nghiệm $(x;y)=\left(3+2\sqrt{3};\frac{4+3\sqrt{3}}{2}\right)$ & $(x;y)=\left(\frac{5-2\sqrt{13}}{9};-\frac{41+7\sqrt{13}}{72}\right)$

**Bài 105: Giải bất phương trình:** $\sqrt{4x^2+x+6}-\sqrt{x+1}\ge 4x-2$.

**Lần 1 – THPT SỞ BÀ RỊA VŨNG TÀU**

**Lời giải tham khảo**

Điều kiện: $x\ge -1$.

Ta có: $\sqrt{4x^2+x+6}-\sqrt{x+1}\ge 4x-2\Leftrightarrow\sqrt{(2x-1)^2+5(x+1)}-\sqrt{x+1}\ge 2(2x-1)$. (1)

Dễ thấy $x=-1$ là một nghiệm của bất phương trình.

Với $x>-1$, ta có: $(1)\Leftrightarrow\sqrt{\frac{(2x-1)^2}{x+1}+5}-1\ge\frac{2(2x-1)}{\sqrt{x+1}}$..

Đặt $t=\frac{2x-1}{\sqrt{x+1}}$. Ta thu được BPT: $\sqrt{t^2+5}\ge 2t+1$.

Ta có: $\sqrt{t^2+5}\ge 2t+1\Leftrightarrow t\le\frac{2}{3}$.

$\frac{2x-1}{\sqrt{x+1}}\le\frac{2}{3}\Leftrightarrow 2\sqrt{x+1}\ge 6x-3\Leftrightarrow -1<x\le\frac{10+\sqrt{5}}{18}$.

Vậy BPT có tập nghiệm: $T=\left[-1;\frac{10+\sqrt{5}}{18}\right]$.

**Bài 106: Giải hệ phương trình:** $(2x^2-2x+1)(2x-1)+(8x^2-8x+1)\sqrt{-x^2+x}=0$.

**Lần 1 – THPT SỞ HÀ TĨNH**

**Lời giải tham khảo**

Điều kiện: $0\le x\le 1$.

$(2x^2-2x+1)(2x-1)+(8x^2-8x+1)\sqrt{-x^2+x}=0$

$\Leftrightarrow(1-2(-x^2+x))(2x-1)+(2(2x-1)^2-1)\sqrt{-x^2+x}=0$

Đặt $a=2x-1;b=\sqrt{-x^2+x}$. Phương trình đã cho trở thành:

$(1-2b^2)a+(2a^2-1)b=0\Leftrightarrow(a-b)(2ab+1)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=b\\2ab+1=0\end{array}\right.$

Với $a=b$, ta có: $2x-1=\sqrt{-x^2+x}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge\frac{1}{2}\\-x^2+x=4x^2-4x+1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge\frac{1}{2}\\5x^2-5x+1=0\end{cases}\Leftrightarrow x=\frac{5+\sqrt{5}}{10}$

Với $2ab+1=0$, ta có $2(2x-1)\sqrt{-x^2+x}+1=0\Leftrightarrow 2(1-2x)\sqrt{-x^2+x}=1$ (1)

Phương trình có nghiệm khi $0<x<\frac{1}{2}\Rightarrow 0<1-2x<1$

Mặt khác $2\sqrt{-x^2+x}=2\sqrt{x(1-x)}\le x+(1-x)=1$ .Suy ra $2(1-2x)\sqrt{-x^2+x}\le 1$.

Do không tồn tại x để đẳng thức xảy ra nên phương trình vô nghiệm.

Vạy nghiệm của phương trình là $x=\dfrac{5+\sqrt{5}}{10}$.

**Bài 107: Giải hệ phương trình:** $\begin{cases}(xy-3)\sqrt{y+2}+\sqrt{x}=\sqrt{x^5}+(y-3x)\sqrt{y+2}\\ \sqrt{9x^2+16}-2\sqrt{2y+8}=4\sqrt{2-x}\end{cases}$.

**Lần 1 – THPT SỞ LÀO CAI**

**Lời giải tham khảo**

Điều kiện: $\begin{cases}0\le x\le 2\\ y\ge -2\end{cases}$ (*). Với điều kiện (*) ta có

$(1)\Leftrightarrow (x-1)\left[(y+3)\sqrt{y+2}-(x+1)\sqrt{x}\right]=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=1\\ (y+3)\sqrt{y+2}=(x+1)\sqrt{x}\quad (3)\end{array}\right.$

Với $x=1$ thay vào (2) ta được: $2\sqrt{2y+8}=1\Leftrightarrow y=-\dfrac{31}{8}$ ( Không thỏa mãn điều kiện)⊚Ta có:

$(3)\Leftrightarrow\left(\sqrt{y+2}\right)^3+\sqrt{y+2}=(\sqrt{x})^3+\sqrt{x}$ (4).

Ta có: $(3)\Leftrightarrow\left(\sqrt{y+2}\right)^3+\sqrt{y+2}=(\sqrt{x})^3+\sqrt{x}$ (4).

Xét hàm số $f(t)=t^3+t$ trên $\mathbb{R}$; $f'(t)=3t^2+1>0,\forall t\in\mathbb{R}$

Suy ra, hàm số $f(t)$ đồng biến và liên tục trên $\mathbb{R}$. Khi đó:

$(4)\Leftrightarrow f(\sqrt{y+2})=f(\sqrt{x})\Leftrightarrow\sqrt{y+2}=\sqrt{x}\Leftrightarrow y=x-2$

Thay $y=x-2$ vào (2) ta được:

$4\sqrt{2-x}+2\sqrt{2x+4}=\sqrt{9x^2+16}$

$\Leftrightarrow 32-8x+16\sqrt{2(4-x^2)}=9x^2\Leftrightarrow 8(4-x^2)+16\sqrt{2(4-x^2)}-(x^2+8x)=0$

Đặt: $t=\sqrt{2(4-x^2)}$ $(t\ge 0)$; PT trở thành: $4t^2+16t-(x^2+8x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=\dfrac{x}{2}\\ t=-\dfrac{x}{2}-4<0(loai)\end{array}\right.$

Ta có: $\sqrt{2(4-x^2)}=\dfrac{x}{2}\Leftrightarrow\begin{cases}0\le x\le 2\\ x^2=\dfrac{32}{9}\end{cases}\Leftrightarrow x=\dfrac{4\sqrt{2}}{3}\Rightarrow y=\dfrac{4\sqrt{2}-6}{3}$

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $(x;y)=\left(\dfrac{4\sqrt{2}}{3};\dfrac{4\sqrt{2}-6}{3}\right)$

**Bài 108: Giải hệ phương trình:** $\begin{cases}x-3y-2+\sqrt{xy-y^2+x-y}=0\\ 3\sqrt{8-x}-4\sqrt{y+1}=x^2-14y-12\end{cases}$.

**Lần 1 – THPT SỞ QUẢNG NAM**

**Lời giải tham khảo**

$(I)\Leftrightarrow\begin{cases}x-y+\sqrt{(x-y)(y+1)}-2(y+1)=0 & (1)\\ 3\sqrt{8-x}-4\sqrt{y+1}=x^2-14y-12 & (2)\end{cases}$

Điều kiện: $x\le 8$, $y\ge -1$, $(x-y)(y+1)\ge 0$ (*)

Nếu (x ; y) là nghiệm của hệ (I) thì $y>-1$. Suy ra $x-y\ge 0$.

Do đó: $(1) \Leftrightarrow \frac{x-y}{y+1}+\sqrt{\frac{x-y}{y+1}}-2=0 \Leftrightarrow \sqrt{\frac{x-y}{y+1}}=1 \Leftrightarrow \frac{x-y}{y+1}=1 \Leftrightarrow x=2y+1$

Thay x = 2y + 1 vào (2) ta được:

$3\sqrt{7-2y}-4\sqrt{y+1}=(2y+1)^2-14y-12 \Leftrightarrow 4\sqrt{y+1}-3\sqrt{7-2y}+4y^2-10y-11=0$

$\Leftrightarrow 4(\sqrt{y+1}-2)-3(\sqrt{7-2y}-1)+4y^2-10y-6=0$

$\Leftrightarrow (y-3)\left(\frac{2}{\sqrt{y+1}+2}+\frac{3}{\sqrt{7-2y}+1}+2y+1\right)=0 \quad (3)$

Vì $-1<y\le\frac{7}{2}$ nên $\frac{2}{\sqrt{y+1}+2}\ge\frac{2\sqrt{2}}{3+2\sqrt{2}}$, $\frac{3}{\sqrt{7-2y}+1}>\frac{3}{4}$, $2y+1>-1$

$\Rightarrow \frac{2}{\sqrt{y+1}+2}+\frac{3}{\sqrt{7-2y}+1}+2y+1>0$. Do đó: $(3) \Leftrightarrow y-3=0 \Leftrightarrow y=3$

$\Rightarrow$ x = 7 (thỏa (*)). Vậy hệ phương trình đã cho có một nghiệm (x ; y) = (7 ; 3).

**Bài 109: Giải hệ phương trình:** $\begin{cases} 2y^3+y+2x\sqrt{1-x}=3\sqrt{1-x} \\ \sqrt{9-4y^2}=2x^2+6y^2-7 \end{cases} \quad (x,y\in\mathbb{R})$.

**Lần 1 – THPT SỞ QUẢNG NGÃI**

**Lời giải tham khảo**

Điều kiện: $x\le1; y\in\left[-\frac{3}{2};\frac{3}{2}\right]$. Ta có

$(1) \Leftrightarrow 2y^3+y=2\sqrt{1-x}-2x\sqrt{1-x}+\sqrt{1-x}$

$\Leftrightarrow 2y^3+y=2(1-x)\sqrt{1-x}+\sqrt{1-x}$

Xét hàm số $f(t)=2t^3+t$, ta có $f'(t)=6t^2+1>0, \forall t\in\mathbb{R} \Rightarrow f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Vậy $(1) \Leftrightarrow f(y)=f(\sqrt{1-x}) \Leftrightarrow y=\sqrt{1-x} \Leftrightarrow \begin{cases} y\ge0 \\ y^2=1-x \end{cases}$

Thế vào (2) ta được: $\sqrt{4x+5}=2x^2-6x-1$

Pt $\Leftrightarrow 2\sqrt{4x+5}=4x^2-12x-2 \Leftrightarrow \left(\sqrt{4x+5}+1\right)^2=(2x-2)^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{4x+5}=2x-3 (vn) \\ \sqrt{4x+5}=1-2x \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x\le\frac{1}{2} \\ \left[\begin{array}{l} x=1+\sqrt{2} (l) \\ x=1-\sqrt{2} \end{array}\right. \end{cases}$

Với $x=1-\sqrt{2} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} y=\sqrt[4]{2} \\ y=-\sqrt[4]{2} \end{array}\right.$ Vậy hệ có hai nghiệm.

**Bài 110: Giải bất phương trình:** $2x^2+\sqrt{x+2}+5\le\sqrt{2}\left(\sqrt{x+2}+x\right)\sqrt{x^2-x+3}+x$.

**Lần 1 – THPT SỞ THANH HÓA**

**Lời giải tham khảo**

Gọi bất phương trình đã cho là (1). Điều kiện xác định: $x\ge-2$.

$(1) \Leftrightarrow \sqrt{2}\left(\sqrt{x+2}+x\right)\sqrt{x^2-x+3}-\left(\sqrt{x+2}+x\right)\ge 2x^2-2x+5$

$\Leftrightarrow\left(\sqrt{x+2}+x\right)\left(\sqrt{2x^2-2x+6}-1\right)\ge 2x^2-2x+5$

$\Leftrightarrow\left(\sqrt{x+2}+x\right)\left(2x^2-2x+6-1\right)\ge(2x^2-2x+5)\left(\sqrt{2x^2-2x+6}+1\right)$

$\Leftrightarrow\sqrt{x+2}+x\ge\sqrt{2x^2-2x+6}+1$ (Do $2x^2-2x+5>0,\forall x\in R$)

$\Leftrightarrow\sqrt{x+2}+x-1\ge\sqrt{2(x-1)^2+2(x+2)}$ (2)

Đặt $a=\sqrt{x+2}, b=x-1(a\ge 0)$, (2) trở thành

$a+b\ge\sqrt{2a^2+2b^2}\Leftrightarrow\begin{cases}a+b\ge 0\\(a+b)^2\ge 2a^2+2b^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a+b\ge 0\\(a-b)^2\le 0\end{cases}\Leftrightarrow a=b\ge 0$

Do đó ta có $\sqrt{x+2}=x-1\Leftrightarrow\begin{cases}x-1\ge 0\\x+2=(x-1)^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge 1\\x^2-3x-1=0\end{cases}\Leftrightarrow x=\dfrac{3+\sqrt{13}}{2}$.

Vậy bất phương trình đã cho có nghiệm $x=\dfrac{3+\sqrt{13}}{2}$.

**Bài 111: Giải hệ phương trình:** $\begin{cases}\sqrt{x^2\left(1+y^2\right)}-\sqrt{1+x^2}=1-xy\\(2x-7xy)\left(\sqrt{3x-2}-\sqrt{x+3xy}\right)=5\end{cases}$.

**Lần 1 – THPT SỞ HÀ NỘI**

**Lời giải tham khảo**

ĐK: $\begin{cases}x\ge\dfrac{2}{3}\\x+3xy\ge 0\end{cases}$

(1) $\Leftrightarrow\sqrt{1+y^2}-\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}=\dfrac{1}{x}-y\Leftrightarrow y+\sqrt{1+y^2}=\dfrac{1}{x}+\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}$ (3)

Xét hàm số $f(t)=t+\sqrt{1+t^2}, t\in\mathbb{R}$. *Do* $f'(t)>0\Rightarrow$ hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$

Do đó (3) $\Leftrightarrow f(y)=f\left(\dfrac{1}{x}\right)\Leftrightarrow y=\dfrac{1}{x}$

Khi đó, (2) $\Leftrightarrow(2x-7)\left(\sqrt{3x-2}-\sqrt{x+3}\right)=5\Leftrightarrow\sqrt{3x-2}-\sqrt{x+3}-\dfrac{5}{2x-7}=0$ (vì $x=\dfrac{7}{2}$ không là nghiệm)

Xét hàm số $g(x)=\sqrt{3x-2}-\sqrt{x+3}-\dfrac{5}{2x-7}$, với $x\in\left[\dfrac{2}{3};+\infty\right)\setminus\left\{\dfrac{7}{2}\right\}$

$\Rightarrow g'(x)=\dfrac{3}{2\sqrt{3x-2}}-\dfrac{1}{2\sqrt{x+3}}+\dfrac{10}{(2x-7)^2}>0$, với $x\in\left[\dfrac{2}{3};+\infty\right)\setminus\left\{\dfrac{7}{2}\right\}$

Suy ra $g(x)$ đồng biến trên $\left[\dfrac{2}{3};\dfrac{7}{2}\right)$ và $\left(\dfrac{7}{2};+\infty\right)$

Mà $g(1)=g(6)=0$ nên phương trình có hai nghiệm $x=1; x=6$

Vậy hệ có nghiệm là $(1;1);\left(6;\dfrac{1}{6}\right)$

**Bài 112: Giải hệ phương trình:** $\begin{cases}\sqrt{2x^2+6xy+17y^2}+\sqrt{17x^2+6xy+2y^2}=5(x+y)\\(x^2+1)\left(\sqrt{x+2}-2y\right)+(6y+11)\sqrt{x+2}=x^2\end{cases}$.

**Lần 1– THPT SỞ NAM ĐỊNH**

**Lời giải tham khảo**

Điều kiện: $x \ge -2$

Từ (1) $\Rightarrow x+y>0$ và

$$VT(1)=\sqrt{(x+4y)^2+(x-y)^2}+\sqrt{(4x+y)^2+(x-y)^2}\ge\sqrt{(x+4y)^2}+\sqrt{(4x+y)^2}=|x+4y|+|4x+y|\ge 5$$

Dấu "=" xảy ra $x=y\ge 0$ ◎Thế $x=y$ vào pt(2) ta được

Thế $x=y$ vào pt(2) ta được

$$(x^2+1)\left(\sqrt{x+2}-2x\right)+(6x+11)\sqrt{x+2}=x^2$$

$$\Leftrightarrow (x^2+6x+12)\sqrt{x+2}=2x^3+x^2+2x \Leftrightarrow 2x^3+x(x+2)-\left[x^2+6(x+2)\right]\sqrt{x+2}=0$$

$$\Leftrightarrow 2x^3+x\left(\sqrt{x+2}\right)^2-x^2\sqrt{x+2}-6\left(\sqrt{x+2}\right)^3=0$$

$$\Leftrightarrow 2\left(\frac{x}{\sqrt{x+2}}\right)^3-\left(\frac{x}{\sqrt{x+2}}\right)^2+\frac{x}{\sqrt{x+2}}-6=0(do\ x\ge 0)$$

Đặt $t=\frac{x}{\sqrt{x+2}}$, pt trên trở thành: $2t^3-t^2+t-6=0\Leftrightarrow(2t-3)(t^2+2t+2)=0\Leftrightarrow t=\frac{3}{2}$

$$\Rightarrow \frac{x}{\sqrt{x+2}}=\frac{3}{2}\Leftrightarrow 3\sqrt{x+2}=2x\Leftrightarrow 4x^2-9x-18=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x=\frac{9+\sqrt{369}}{8}(t/m)\\ x=\frac{9-\sqrt{369}}{8}(l)\end{array}\right.$$

Với $x=\frac{9+\sqrt{369}}{8}\Rightarrow y=\frac{9+\sqrt{369}}{8}$ Vậy hệ phương trình có nghiệm $\left(\frac{9+\sqrt{369}}{8};\frac{9+\sqrt{369}}{8}\right)$

**Bài 113: Giải hệ phương trình:** $\begin{cases}2016^{x+y}(\sqrt{x^2+2}-x)(\sqrt{y^2+2}-y)=2\\ 25x^2+9x\sqrt{9x^2-4}=2+\dfrac{18y^2}{y^2+1}\end{cases}$ $(x,\ y\in\mathbb{R})$..

**Lần 2 – THPT SÔNG LÔ**

**Lời giải tham khảo**

Điều kiện : $|x|\ge\frac{2}{3}$

$$(1)\Leftrightarrow 2016^x(\sqrt{x^2+2}-x)=2016^{-y}(\sqrt{y^2+2}+y)$$

$$\Leftrightarrow x\ln 2016+\ln(\sqrt{x^2+2}-x)=-y\ln 2016+\ln[\sqrt{(-y)^2+2}-(-y)]$$

Xét hàm số : $f(t)=t\ln 2016+\ln(\sqrt{t^2+2}-t), t\in R$ có $f'(t)=\ln 2016-\frac{1}{\sqrt{t^2+2}}>0,\forall t\in\mathbb{R}$.

Do đó hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$, do đó $x=-y$ .

Thay vào (2) ta có : $25x^2+9x\sqrt{9x^2-4}=2+\frac{18x^2}{x^2+1}$ (3)

Nếu $x\ge\frac{2}{3}$ thì $18x^2>\frac{18x^2}{x^2+1}, 7x^2>2\Rightarrow VT(3)>VP(3)$ (loại)

Nếu $x\le-\frac{2}{3}$ thì $25-9\sqrt{9-\frac{4}{x^2}}=\frac{2}{x^2}+\frac{18}{x^2+1}$

Đặt $t=\frac{1}{x^2}\left(0<t\le\frac{9}{4}\right)$ ta được

$$25-9\sqrt{9-4t}=2t+\frac{18t}{t+1}\Leftrightarrow\left(\frac{18t}{t+1}-12\right)+2t-4+9\sqrt{9-4t}-9=0$$

$$\Leftrightarrow\frac{6}{t+1}(t-2)+2(t-2)-\frac{36(t-2)}{\sqrt{9-4t}+1}=0 \Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=2\\ \frac{6}{t+1}+2-\frac{36}{\sqrt{9-4t}+1}=0\quad(4)\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=2\\ \frac{6}{t+1}+2-\frac{36}{\sqrt{9-4t}+1}=0\quad(4)\end{array}\right.$$

Vì $0\le\sqrt{9-4t}<3\Rightarrow 12<\frac{36}{\sqrt{9t-4}+1}\le 36\Rightarrow VT(4)<0,\forall t\in\left(0;\frac{9}{4}\right]$

$\Rightarrow t=2$ . Từ đó tìm được $x=\frac{-1}{\sqrt{2}},y=\frac{1}{\sqrt{2}}$

**Bài 114: Giải bất phương trình:** $\sqrt{x}\ge\frac{x^4-2x^3+2x-1}{x^3-2x^2+2x}\quad(x\in\mathbb{R})$.

**Lần 1 – THPT TAM ĐẢO**

**Lời giải tham khảo**

**HD:** Từ phương trình (1) dùng casio nhóm nhân tử ta có:

$$(x-y)(x^2-y+1)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}y=x\\ y=x^2+1\end{array}\right.$$

TH1: $y=x^2+1$ thay vào pt (2), suy ra pt vô nghiệm.

TH2: $y=x$ thay vào (2) ta được phương trình:

$$3x\left(2+\sqrt{9x^2+3}\right)+(4x+2)\left(\sqrt{1+x+x^2}+1\right)=0$$

Đưa về dạng hàm:

$$3x\left(2+\sqrt{9x^2+3}\right)=(-2x-1)\left(\sqrt{2+(-2x-1)^2}+2\right)\Leftrightarrow 3x=-2x-1\Leftrightarrow x=-\frac{1}{5}$$

ĐS: $(x;y)=\left(-\frac{1}{5};-\frac{1}{5}\right)$

**Bài 115: Giải bất phương trình:** $\sqrt{\frac{x^2+x+2}{x+3}}+x^2\le\frac{2}{\sqrt{x^2+3}}+1$.

**Lần 1 – THPT THẠCH THÀNH 1**

**Lời giải tham khảo**

Điều kiện $x>-3$. Bất pt đã cho tương đương với

$$\sqrt{\frac{x^2+x+2}{x+3}}-\frac{2}{\sqrt{x^2+3}}+x^2-1\le 0 \Leftrightarrow \frac{\frac{x^2+x+2}{x+3}-\frac{4}{x^2+3}}{\sqrt{\frac{x^2+x+2}{x+3}}+\frac{2}{\sqrt{x^2+3}}}+x^2-1\le 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\frac{\left(x^2-1\right)\left(x^2+x+6\right)}{\left(x+3\right)\left(x^2+3\right)}}{\sqrt{\frac{x^2+x+2}{x+3}}+\frac{2}{\sqrt{x^2+3}}}+x^2-1\le 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x^2-1\right)\left[\frac{x^2+x+6}{\left(x+3\right)\left(x^2+3\right)\left(\sqrt{\frac{x^2+x+2}{x+3}}+\frac{2}{\sqrt{x^2+3}}\right)}+1\right]\le 0$$

$\Leftrightarrow x^2-1\le 0 \Leftrightarrow -1\le x\le 1$ (Với $x>-3$ thì biểu thức trong ngoặc vuông luôn dương).

Vậy tập nghiệm của bất pt là $S=\left[-1;1\right]$

**Bài 116: Giải hệ phương trình:** $\begin{cases} 2x^3-9y^3=\left(x-y\right)\left(2xy+3\right) \\ x^2+y^2=3+xy. \end{cases}$.

**Lần 2 – THPT THẠCH THÀNH 1**

**Lời giải tham khảo**

**Ta có** $\begin{cases} 2x^3-9y^3=(x-y)(2xy+3) \\ x^2+y^2=3+xy \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^3-9y^3=(x-y)(2xy+x^2+y^2-xy) \\ x^2+y^2-xy=3 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x^3-9y^3=x^3-y^3 \\ x^2+y^2-xy=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3=8y^3 \\ x^2+y^2-xy=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2y \\ x^2+y^2-xy=3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=2y \\ 3y^2=3 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases} \\ \begin{cases} x=-2 \\ y=-1 \end{cases} \end{array}\right.$$

**Vậy hệ có 2 nghiệm** $\left(x;y\right)=\left(2;1\right);\ \left(x;y\right)=\left(-2;-1\right)$.

**Bài 117: Giải hệ phương trình:** $\begin{cases} x^{10}+2x^6=y^5+2x^4y \\ \sqrt{x^2+5}+\sqrt{2y+1}=6 \end{cases}$.

**Lần 3 – THPT THẠCH THÀNH 1**

**Lời giải tham khảo**

Điều kiện: $2y+1\ge 0 \Rightarrow y\ge -\frac{1}{2}$

- Xét x=0, từ pt đầu suy ra y=0, thay x=y=0 vào pt thứ hai không thỏa mãn (loại)◉Xét $x\ne 0$,

chia 2 vế của pt đầu cho $x^5\ne 0$, ta được $x^5+2x=\left(\frac{y}{x}\right)^5+2\left(\frac{y}{x}\right)$ (1)

- Xét $x \neq 0$, chia 2 vế của pt đầu cho $x^5 \neq 0$, ta được $x^5 + 2x = \left(\frac{y}{x}\right)^5 + 2\left(\frac{y}{x}\right)$ (1)

Xét hàm số $f(t) = t^5 + 2t, \forall t \in \mathbb{R}$. Ta có $f'(t) = 5t^4 + 2 > 0, \forall t \in \mathbb{R}$.

Vậy hàm số $f(t) = t^5 + 2t$ đồng biến trên $\mathbb{R}$. Do đó (1) $\Leftrightarrow x = \frac{y}{x} \Leftrightarrow y = x^2$.

Thay vào pt thứ 2 của hệ ta được: $\sqrt{y+5} + \sqrt{2y+1} = 6$ (2)

Xét hàm số $g(y) = \sqrt{y+5} + \sqrt{2y+1}, \forall y \geq -\frac{1}{2}$.

Ta có $g'(y) = \frac{1}{2\sqrt{y+5}} + \frac{1}{\sqrt{2y+1}} > 0, \forall y > -\frac{1}{2}$. Vậy g(y) đồng biến trên khoảng $\left(-\frac{1}{2}; +\infty\right)$.

Mà g(4)=6 nên (2) $\Leftrightarrow y = 4$

Suy ra $y = x^2 = 4 \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 4 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x = -2 \\ y = 4 \end{cases}$

**Bài 118: Giải hệ phương trình:** $\begin{cases} \sqrt{9y^2 + (2y+3)(y-x)} + 4\sqrt{xy} = 7x \\ (2y-1)\sqrt{1+x} + (2y+1)\sqrt{1-x} = 2y \end{cases}$.

**Lần 1 – THPT THANH CHƯƠNG 1**

**Lời giải tham khảo**

Điều kiện: $9y^2 + (2y+3)(y-x) \geq 0; xy \geq 0; -1 \leq x \leq 1$.

Từ phương trình thứ nhất, ta có được: $x \geq 0 \Rightarrow y \geq 0$

+ Xét $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$, thỏa mãn hệ phương trình.

+ Xét x, y không đồng thời bằng 0, phương trình thứ nhất tương đương với:

$$\sqrt{9y^2 + (2y+3)(y-x)} - 3x + 4\sqrt{xy} - 4x = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{9y^2 + (2y+3)(y-x) - 9x^2}{\sqrt{9y^2 + (2y+3)(y-x)} + 3x} + \frac{4(xy - x^2)}{\sqrt{xy} + x} = 0$$

$$\Leftrightarrow (y-x)\left[\frac{9(x+y) + (2y+3)}{\sqrt{9y^2 + (2y+3)(y-x)} + 3x} + \frac{4x}{\sqrt{xy} + x}\right] = 0$$

$$\Leftrightarrow y = x$$

Thế $y = x$ vào phương trình thứ hai, ta được:

$$(2x-1)\sqrt{1+x} + (2x+1)\sqrt{1-x} = 2x$$

$$\Leftrightarrow 2x\left(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x} - 1\right) - \left(\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}\right) = 0$$

Đặt $\begin{cases} a = \sqrt{1+x}; a \geq 0 \\ b = \sqrt{1-x}; b \geq 0 \end{cases} \Rightarrow 2x = a^2 - b^2$.

Phương trình trở thành: $(a^2 - b^2)(a+b-1) - (a-b) = 0$.

$$\Leftrightarrow (a-b)\left[(a+b)(a+b-1) - 1\right] = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = b \\ (a+b)^2 - (a+b) - 1 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = b \\ a + b = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \end{array}\right.$$

+ Với $a=b \Leftrightarrow \sqrt{1+x}=\sqrt{1-x} \Leftrightarrow x=0$ (loại)

+ Với $a+b=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \Leftrightarrow \sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \Leftrightarrow x=\sqrt{\dfrac{5+\sqrt{5}}{8}} \Rightarrow y=\sqrt{\dfrac{5+\sqrt{5}}{8}}$.

Hệ phương trình có nghiệm: $(x;y)=(0;0);\left(\sqrt{\dfrac{5+\sqrt{5}}{8}};\sqrt{\dfrac{5+\sqrt{5}}{8}}\right)$.

**Bài 119: Giải hệ phương trình:** $\begin{cases} x+3\sqrt{xy+x-y^2-y}=5y+4 \\ \sqrt{4y^2-x-2}+\sqrt{y-1}=x-1 \end{cases}$.

**Lần 1– THPT THANH CHƯƠNG 3**

**Lời giải tham khảo**

Đk: $\begin{cases} xy+x-y^2-y\ge 0 \\ 4y^2-x-2\ge 0 \\ y-1\ge 0 \end{cases}$

Ta có (1) $\Leftrightarrow x-y+3\sqrt{(x-y)(y+1)}-4(y+1)=0$

Đặt $u=\sqrt{x-y}, v=\sqrt{y+1}$ $(u\ge 0, v\ge 0)$

Khi đó (1) trở thành : $u^2+3uv-4v^2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u=v \\ u=-4v(vn) \end{array}\right.$

Với $u=v$ ta có $x=2y+1$, thay vào (2) ta được : $\sqrt{4y^2-2y-3}+\sqrt{y-1}=2y$

$\Leftrightarrow \sqrt{4y^2-2y-3}-(2y-1)+\left(\sqrt{y-1}-1\right)=0$

$\dfrac{2(y-2)}{\sqrt{4y^2-2y-3}+2y-1}+\dfrac{y-2}{\sqrt{y-1}+1}=0 \Leftrightarrow (y-2)\left(\dfrac{2}{\sqrt{4y^2-2y-3}+2y-1}+\dfrac{1}{\sqrt{y-1}+1}\right)=0$

$\Leftrightarrow y=2$( vì $\Leftrightarrow \dfrac{2}{\sqrt{4y^2-2y-3}+2y-1}+\dfrac{1}{\sqrt{y-1}+1}>0 \forall y\ge 1)$

Với $y=2$ thì $x=5$. Đối chiếu Đk ta được nghiệm của hệ PT là $(5;2)$

**Bài 120: Giải hệ phương trình:** $\begin{cases} x^3+y^3+3(x+y)=6y(y-2)+14 \\ 27x^3+27x^2+20x+4=4.\sqrt[3]{y+2x-1} \end{cases}$.

**Lần 1 – THPT THỐNG NHẤT**

**Lời giải tham khảo**

Phương trình (1) $\Leftrightarrow x^3+3x=-y^3+6y^2-15y+14$

$\Leftrightarrow x^3+3x=(2-y)^3+3(2-y)$

Xét hàm số: $f(t)=t^3+3t$ liên tục trên R.

Ta có $f'(t)=3t^2+3>0$ với $(\forall t\in R) \Rightarrow$ hàm số đồng biến trên R.

$pt: f(x)=f(2-y) \Leftrightarrow x=2-y \Leftrightarrow y=2-x$

Thế y = 2-x vào phương trình (2) ta được.

$27x^3+2x^2+20x+4=4\sqrt[3]{1+x} \Leftrightarrow (3x+1)^3+4(3x+1)=x+1+4\sqrt[3]{x+1}$

Xét hàm số: $g(t)=t^3+4t$ liên tục trên R.

Ta có $g'(t)=3t^2+4>0$ $\Rightarrow$hàm số đồng biến trên R.

Suy ra: $g(3x+1)=g(\sqrt[3]{x+1}) \Leftrightarrow 3x+1=\sqrt[3]{x+1} \Leftrightarrow 27x^3+27x^2+9x+1=x+1$

$$\Leftrightarrow 27x^3+27x^2+8x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \Rightarrow y=2 \\ 27x^2+27x+8=0(vn) \end{array}\right.$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm (x;y)=(0;2)

**Bài 121: Giải hệ phương trình:** $\begin{cases} \sqrt{2x^2-6xy+5y^2}+\sqrt{2x^2+2xy+13y^2}=2(x+y) & (1) \\ (x+2y)\sqrt{x+2}-4y^2.\sqrt{y}=8y^4.\sqrt{y}-2\sqrt{x+2} & (2) \end{cases}$.

**Lần 1 – THPT BÌNH LONG**

**Lời giải tham khảo**

Điều kiện: $\begin{cases} x\geq -2 \\ y\geq 0 \\ x+y\geq 0 \end{cases}$

Xét y = 0, hệ vô nghiệm nên y khác 0 . Chia cả 2 vế của (1) cho y ta được:

$$\sqrt{2\left(\frac{x}{y}\right)^2-6\frac{x}{y}+5}+\sqrt{2\left(\frac{x}{y}\right)^2+2\frac{x}{y}+13}=2(\frac{x}{y}+1)$$

Dat t=$\frac{x}{y}(t>-1)$

$PT:\sqrt{2t^2-6t+5}+\sqrt{2t^2+2t+13}=2(t+1)$

$\Leftrightarrow t^4-2t^3-3t^2+4t+4=0$

$$\Leftrightarrow (t+1)^2(t-2)^2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-1(loai) \\ t=2(t/m) \end{array}\right.$$

Với t = 2 => x=2y, thế vào (2) ta được:

$4y\sqrt{2y+2}-4y^2.\sqrt{y}=8y^4.\sqrt{y}-2\sqrt{2y+2}$

$\Leftrightarrow 4y\sqrt{2y+2}+2\sqrt{2y+2}=8y^4.\sqrt{y}+4y^2.\sqrt{y}$

$$\Leftrightarrow 4\sqrt{\frac{2}{y}+2}+\frac{2}{y}\sqrt{\frac{2}{y}+2}=8y^3+4y$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{2}{y}+2\right)\sqrt{\frac{2}{y}+2}+2\sqrt{\frac{2}{y}+2}=(2y)^3+2.(2y) \qquad (3)$$

Xét hàm số f(u)=u³+2u với u>0; có f′(u) = 3u² +2>0, mọi u>0 => hàm số đồng biến

Từ (3) $\Rightarrow f\left(\sqrt{\frac{2}{y}+2}\right)=f(2y) \Leftrightarrow \sqrt{\frac{2}{y}+2}=2y \Leftrightarrow 4y^3-2y-2=0 \Leftrightarrow y=1$

Hệ có nghiệm duy nhất (2;1

**Bài 122: Giải hệ phương trình:** $\begin{cases} \sqrt{y}-\sqrt{x+y+1}=x^3+3y(x^2+xy+y-1)+1 \\ y^2+\sqrt{y-5x}=5 \end{cases}$.

**Lần 2 – THPT BÌNH LONG**

**Lời giải tham khảo**

Điều kiện : $\begin{cases} y > 0 \\ x + y \geq -1 \end{cases}$ ( vì y=0 không thỏa hpt)

$(1) \Leftrightarrow \dfrac{-(x+1)}{\sqrt{y}+\sqrt{x+y+1}} = (x+1)(x^2-x+1)+3y(x+1)(x+y-1)$

$\Leftrightarrow (x+1)[x^2-x+3xy+3y^2-3y+1+\dfrac{1}{\sqrt{y}+\sqrt{x+y+1}}]$

$\Leftrightarrow (x+1)[x^2+(3y-1)x+3y^2-3y+1+\dfrac{1}{\sqrt{y}+\sqrt{x+y+1}}]$ (3)

Xét A = $x^2$ + (3y – 1 )x + $3y^2$ – 3y + 1 ; Δ= -3(y - 1)$^2$ $\leq 0\ \forall x \in R$ => $A \geq 0\ \forall x, y \in R$

(3) $\Leftrightarrow$ x = -1

Thay x = -1 vào (2) ta có : $y^2+\sqrt{y+5}=5 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = \dfrac{-1+\sqrt{17}}{2} \\ y = \dfrac{-1-\sqrt{17}}{2} (l) \end{array}\right.$

Vậy hệ phương trình có nghiệm ( - 1 ; $\dfrac{-1+\sqrt{17}}{2}$)

**Bài 123: Giải hệ phương trình:** $\begin{cases} y^3+y^2+4(x-y-1)=xy^2 \\ (x^2+1)y^2+x^2(2y+1)=x^2-3x-2 \end{cases}$.

**Lần 3 – THPT BÌNH LONG**

**Lời giải tham khảo**

Biến đổi pt ban đầu về dạng $(y-2)(y+2)(y+1-x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=2 \\ y=-2 \\ y=x-1 \end{array}\right.$

TH 1: Với y = 2 thay vào pt (2) : $8x^2+3x+6=0$ vô nghiệm

TH 2: Với y = - 2 thay vào (2): $3x+6=0 \Rightarrow x=-2$ suy ra nghiệm (x; y) =(-2;-2)

TH 3: Với $y=x-1$ thay vào (2): $x^4+x+3=0 \Leftrightarrow (x^2-\dfrac{1}{2})^2+(x+\dfrac{1}{2})^2+\dfrac{5}{2}=0$ $(vn)$

Kl: hệ phương trình có nghiệm $(x;y)=(-2;-2)$

**Bài 124: Giải bất phương trình:** $(4x^2-x-7)\sqrt{x+2}>4x-8x^2+10$.

**Lần 1 – THPT CHUYÊN LÊ QUÝ ĐÔN – ĐÀ NẴNG**

**Lời giải tham khảo**

Điều kiện $x \geq 2$.

$(1) \Leftrightarrow (4x^2-x-7)\sqrt{x+2}+8x^2-2x-14>2x-4$

$\Leftrightarrow (4x^2-x-7)\left(\sqrt{x+2}+2\right)>2(x-2)$

$\Leftrightarrow (4x^2-x-7)\left(\sqrt{x+2}+2\right)-2\left(\sqrt{x+2}+2\right)\left(\sqrt{x+2}-2\right)>0$

$\Leftrightarrow \left(\sqrt{x+2}+2\right)\left[(4x^2-x-7)-2\left(\sqrt{x+2}-2\right)\right]>0$

$\Leftrightarrow 4x^2-x-7-2\left(\sqrt{x+2}-2\right)>0 \quad do \quad \sqrt{x+2}+2>0$

$\Leftrightarrow 4x^2-x-3>2\sqrt{x+2} \quad do \quad \sqrt{x+2}+2>0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x\ge -2 \\ 4x^2-x-3>0 & (2) \\ \left(4x^2-x-3\right)^2>4(x+2) & (3) \end{cases}$$

$(2) \Leftrightarrow x\ge 1 \;\; v \;\; x\le -\dfrac{3}{4}$

$(3) \Leftrightarrow 16x^4-8x^3-23x^2+2x+1>0$

$\Leftrightarrow (x+1)(4x-1)(4x^2-5x-1)>0$

Lập bảng xét dấu của biểu thức VT. Khi đó, phương trình (3) có tập nghiệm là:

$T_3=(-\infty;-1)\cap\left(\dfrac{5-\sqrt{48}}{8};\dfrac{1}{4}\right)\cap\left(\dfrac{5+\sqrt{48}}{8};+\infty\right)$

Kết hợp với (2) và điều kiện ban đầu, bất phương trình đã cho có tập nghiệm:

$T=[-2;-1)\cap\left(\dfrac{5+\sqrt{48}}{8};+\infty\right)$

**Bài 125: Giải hệ phương trình:** $\begin{cases} \sqrt{2x+1}+x^2+2xy+4y-1=3y^2+\sqrt{2y-1} \\ x\sqrt{x^2+xy+1}=2x^2+3y^2-xy-x-9 \end{cases}$.

**Lần 1 – THPT HÙNG VƯƠNG**

**Lời giải tham khảo**

+) ĐK: $\begin{cases} 2x+1\ge 0 \\ 2y-1\ge 0 \\ x^2+xy+1\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge -\dfrac{1}{2} \\ y\ge \dfrac{1}{2} \\ x^2+xy+1\ge 0 \end{cases}$

+) Ta có PT (1) $\Leftrightarrow \sqrt{2x+1}-\sqrt{2y-1}+x^2+2xy+4y-3y^2-1=0$

$\Leftrightarrow \dfrac{2\ \ x-y+1}{\sqrt{2x+1}+\sqrt{2y-1}}+\ x-y+1\ \ x+3y-1\ =0 \Leftrightarrow\ x-y+1\ \left(\dfrac{2}{\sqrt{2x+1}+\sqrt{2y-1}}+x+3y-1\right)=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-y+1=0 \\ \dfrac{2}{\sqrt{2x+1}+\sqrt{2y-1}}+x+3y-1=0(*) \end{array}\right.$, Vì $x\ge -\dfrac{1}{2}, y\ge \dfrac{1}{2} \Rightarrow x+3y-1\ge 0$ nên (*) vô nghiệm.

+) Với $x-y+1=0 \Leftrightarrow y=x+1$ thay vào phương trình (2) ta có: $x\sqrt{2x^2+x+1}=4x^2+4x-6$

$\Leftrightarrow x\sqrt{2x^2+x+1}-2x=4x^2+2x-6 \Leftrightarrow x\ \ \sqrt{2x^2+x+1}-2\ \ =2\ \ 2x^2+2x-3$

$$\Leftrightarrow \frac{x\left(2x^2+x-3\right)}{\sqrt{2x^2+x+1}+2}-2\left(2x^2+x-3\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}2x^2+x-3=0\\ \dfrac{x}{\sqrt{2x^2+x+1}+2}=2\end{array}\right.$$

Với $2x^2+x-3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=1\\ x=-\frac{3}{2}(l)\end{array}\right. \Rightarrow$ Hệ có nghiệm $\begin{cases}x=1\\ y=2\end{cases}$

Với $\dfrac{x}{\sqrt{2x^2+x+1}+2}=2 \Leftrightarrow 2\sqrt{2x^2+x+1}=x-4 \Leftrightarrow \begin{cases}x\ge 4\\ 7x^2+12x-12=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x\ge 4\\ x=\dfrac{-6\pm 2\sqrt{30}}{7}(l)\end{cases}$

+) Kết luận: Hệ có nghiệm là $\begin{cases}x=1\\ y=2\end{cases}$

**Bài 126: Giải hệ phương trình:** $\begin{cases}x^2-xy+y^2=3\\ 2x^3-9y^3=(x-y)(2xy+3)\end{cases}$.

**Lần 1 – THPT LÊ HỒNG PHONG**

**Lời giải tham khảo**

Thay (1) vào (2) ta được $2x^3-9y^3=(x-y)(2xy+x^2-xy+y^2)$

$(*) \Leftrightarrow \begin{cases}x^2-xy+y^2=3\\ 2x^3-9y^3=x^3-y^3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x^2-xy+y^2=3\\ x=2y\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}y^2=1\\ x=2y\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}x=2\\ y=1\end{cases} v \begin{cases}x=-2\\ y=-1\end{cases}$

**KẾT LUẬN:**

**Bài 127: Giải hệ phương trình:** $\begin{cases}2x^2+\sqrt{2x}=(x+y)y+\sqrt{x+y}\\ \sqrt{x-1}+xy=\sqrt{y^2+21}\end{cases}$.

**Lần 1 – THPT LỘC NINH**

**Lời giải tham khảo**

Điều kiện xác định $x\ge 1, x+y\ge 0$

Khi đó

$$2x^2+\sqrt{2x}=(x+y)y+\sqrt{x+y} \Leftrightarrow 2x^2-xy-y^2+\sqrt{2x}-\sqrt{x+y}=0$$

$$\Leftrightarrow (x-y)(2x+y)+\frac{x-y}{\sqrt{2x}+\sqrt{x+y}}=0 \Leftrightarrow (x-y)\left(2x+y+\frac{1}{\sqrt{2x}+\sqrt{x+y}}\right)=0.$$

Do $x\ge 1, x+y\ge 0 \Rightarrow 2x+y>0$, từ đó suy ra $x=y$.

Thay vào (2) ta có $\sqrt{x-1}+x^2=\sqrt{x^2+21} \Leftrightarrow \sqrt{x-1}-1+x^2-4=\sqrt{x^2+21}-5$

$$\Leftrightarrow (x-2)\left(\frac{1}{\sqrt{x-1}+1}+x+2-\frac{x+2}{\sqrt{x^2+21}+5}\right)=0 \ (3)$$

Vì $x+2-\dfrac{x+2}{\sqrt{x^2+21}+5}=(x+2)\left(1-\dfrac{1}{10+\sqrt{x^2+91}}\right)>0$, từ (3) suy ra $x=2$

Vậy nghiệm của hệ phương trình là $(2;2)$.

**Bài 128: Giải bất phương trình:**
$\left(5x^2-5x+10\right)\sqrt{x+7}+\left(2x+6\right)\sqrt{x+2}\ge x^3+13x^2-6x+32$.

**Lần 2 – THPT LỘC NINH**

**Lời giải tham khảo**

Điều kiện $x\ge -2$. Bất phương trình đã cho tương đương với bất phương trình

$$(5x^2-5x+10)\left(\sqrt{x+7}-3\right)+(2x+6)\left(\sqrt{x+2}-2\right)+3(5x^2-5x+10)+2(2x+6)\ge x^3+13x^2-6x+32$$

$$\Leftrightarrow (5x^2-5x+10)\left(\sqrt{x+7}-3\right)+(2x+6)\left(\sqrt{x+2}-2\right)-x^3+2x^2-5x+10\ge 0$$

$$\Leftrightarrow (x-2)\left(\frac{5x^2-5x+10}{\sqrt{x+7}+3}+\frac{2x+6}{\sqrt{x+2}+2}-x^2-5\right)\ge 0 \quad (*)$$

Do $x\ge -2\Rightarrow \sqrt{x+2}+2\ge 2\Rightarrow \dfrac{1}{\sqrt{x+2}+2}\le \dfrac{1}{2}$ và vì $2x+6>0\Rightarrow \dfrac{2x+6}{\sqrt{x+2}+2}\le \dfrac{2x+6}{2}=x+3$ (1)

Do $x\ge -2\Rightarrow \sqrt{x+7}+3\ge \sqrt{5}+3>5\Rightarrow \dfrac{1}{\sqrt{x+7}+3}<\dfrac{1}{5}$ và vì $5x^2-5x+10>0 \quad \forall x\in\mathbb{R}$

$$\Rightarrow \frac{5x^2-5x+10}{\sqrt{x+7}+3}<\frac{5x^2-5x+10}{5}=x^2-x+2\Rightarrow \frac{5x^2-5x+10}{\sqrt{x+7}+3}-x^2-5<-x-3 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \dfrac{5x^2-5x+10}{\sqrt{x+7}+3}+\dfrac{2x+6}{\sqrt{x+2}+2}-x^2-5<0$. Do đó (*) $\Leftrightarrow x-2\le 0\Leftrightarrow x\le 2$

Kết hợp điều kiện $x\ge -2\Rightarrow -2\le x\le 2$.

**Bài 129: Giải hệ phương trình:** $4x^2+1=\sqrt{3x^2-2x-1}+2x\sqrt{x^2+2x+2}$.

**Lần 2 – THPT Bố Hạ**

**Lời giải tham khảo**

Điều kiện: $x\ge 1$ v $x\le -\dfrac{1}{3}$.

Phương trình:

$$4x^2+1=\sqrt{3x^2-2x-1}+2x\sqrt{x^2+2x+2}$$

$$\Leftrightarrow 8x^2+2-2\sqrt{3x^2-2x-1}-4x\sqrt{x^2+2x+2}=0$$

$$\Leftrightarrow \left(3x^2-2x-1-\sqrt{3x^2-2x-1}+1\right)+\left(x^2+2x+2-4x\sqrt{x^2+2x+2}+4x^2\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{3x^2-2x-1}-1\right)^2+\left(\sqrt{x^2+2x+2}-2x\right)^2=0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\sqrt{3x^2-2x-1}-1=0\\ \sqrt{x^2+2x+2}-2x=0\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}\sqrt{3x^2-2x-1}=1\\ \sqrt{x^2+2x+2}=2x\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}3x^2-2x-1=1\\ x\ge 0\\ x^2+2x+2=4x^2\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}3x^2-2x-2=0\\ x\ge 0\\ -3x^2+2x+2=0\end{cases}\Leftrightarrow x=\frac{1+\sqrt{7}}{2}$$

Vậy, phương trình đã cho có nghiệm $x=\dfrac{1+\sqrt{7}}{2}$.

**Bài 130: Giải hệ phương trình:** $\begin{cases}(x^2-x+2)y+x=0\\(x^4-4x^2-1)y^2+(2x^3+x)y+x^2=0.\end{cases}$.

**Lần 1 – THPT NGUYỄN DU**

**Lời giải tham khảo**

+ (x ; y) = (0 ; 0) là một nghiệm của (I).
+ Mọi cặp số (x ; 0) và (0 ; y) với x≠0, y≠0 đều không phải là nghiệm của (I).
+ Trường hợp x ≠ 0, y ≠ 0:

$$(I)\Leftrightarrow\begin{cases}x^2y-xy+2y+x=0\\x^4y^2-4x^2y^2-y^2+2x^3y+xy+x^2=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x(xy+1)+2y=xy\\x^2(xy+1)^2+xy(xy+1)-y^2=5x^2y^2\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}(x+\frac{1}{y})+\frac{2}{x}=1\\\left(x+\frac{1}{y}\right)^2+\left(x+\frac{1}{y}\right)\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}=5\end{cases}$$

Đặt $a=x+\frac{1}{y}$, $b=\frac{1}{x}$ (b ≠ 0), hệ trên trở thành: (II) $\begin{cases}a+2b=1\\a^2+ab-b^2=5\end{cases}$

Giải hệ (II) được: (a ; b) = (3 ; –1) và (a ; b) = (–7 ; 4)

+ Với (a ; b) = (3 ; –1) thì: $(x;y)=\left(-1;\frac{1}{4}\right)$

+ Với (a ; b) = (–7 ; 4) thì: $(x;y)=\left(\frac{1}{4};-\frac{4}{29}\right)$

**Bài 131: Giải hệ phương trình:** $\begin{cases}xy+x-2=0\\2x^3-x^2y+x^2+y^2-2xy-y=0\end{cases}$ $(x,y\in R)$.

**Lần 2 – THPT NGUYỄN DU**

**Lời giải tham khảo**

(2) <=> $x^2(2x-y+1)-y(2x-y+1)=0$ <=> $(x^2-y)(2x-y+1)=0$

<=> $y=x^2$ hoặc $y=2x+1$

◎

Với $y=x^2$, (1) trở thành $x^3+x-2=0$ <=> $(x-1)(x^2+x+2)=0$ <=> $x=1\rightarrow y=1$

Với $y=2x+1$, (2) trở thành $2x^2+2x-2=0$ <=> $x=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}\rightarrow y=\pm\sqrt{5}$

Vậy hệ phương trình đã cho có tập nghiệm: $S=\{(1;1),\ (\frac{-1+\sqrt{5}}{2};\sqrt{5}),(\frac{1-\sqrt{5}}{2};-\sqrt{5})\}$

**Bài 132: Giải bất phương trình:** $\left(5x^2-5x+10\right)\sqrt{x+7}+\left(2x+6\right)\sqrt{x+2}\ge x^3+13x^2-6x+32$.

**Lần 1 – THPT NGUYỄN VĂN TRỖI**

**Lời giải tham khảo**

Điều kiện $x\ge-2$. Bất phương trình đã cho tương đương với bất phương trình

$$(5x^2-5x+10)\left(\sqrt{x+7}-3\right)+(2x+6)\left(\sqrt{x+2}-2\right)+3(5x^2-5x+10)+2(2x+6)\ge x^3+13x^2-6x+32$$

$\Leftrightarrow (5x^2-5x+10)\left(\sqrt{x+7}-3\right)+(2x+6)\left(\sqrt{x+2}-2\right)-x^3+2x^2-5x+10\geq 0$

$\Leftrightarrow (x-2)\left(\dfrac{5x^2-5x+10}{\sqrt{x+7}+3}+\dfrac{2x+6}{\sqrt{x+2}+2}-x^2-5\right)\geq 0$ (*)

Do $x\geq -2\Rightarrow \sqrt{x+2}+2\geq 2\Rightarrow \dfrac{1}{\sqrt{x+2}+2}\leq \dfrac{1}{2}$ và vì $2x+6>0\Rightarrow \dfrac{2x+6}{\sqrt{x+2}+2}\leq \dfrac{2x+6}{2}=x+3$ (1)

Do $x\geq -2\Rightarrow \sqrt{x+7}+3\geq \sqrt{5}+3>5\Rightarrow \dfrac{1}{\sqrt{x+7}+3}<\dfrac{1}{5}$ và vì $5x^2-5x+10>0 \quad \forall x\in\mathbb{R}$

$\Rightarrow \dfrac{5x^2-5x+10}{\sqrt{x+7}+3}<\dfrac{5x^2-5x+10}{5}=x^2-x+2\Rightarrow \dfrac{5x^2-5x+10}{\sqrt{x+7}+3}-x^2-5<-x-3$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \dfrac{5x^2-5x+10}{\sqrt{x+7}+3}+\dfrac{2x+6}{\sqrt{x+2}+2}-x^2-5<0$. Do đó (*) $\Leftrightarrow x-2\leq 0\Leftrightarrow x\leq 2$

Kết hợp điều kiện $x\geq -2\Rightarrow -2\leq x\leq 2$.

**Bài 133: Giải hệ phương trình:** $\begin{cases}2y^2-3y+1+\sqrt{y-1}=x^2+\sqrt{x}+xy\\ \sqrt{2x+y}-\sqrt{2y-3x+4}+3x^2-14x-8=0\end{cases}$ $;x,y\in R$.

**Lần 1 – THPT THANH HOA**

**Lời giải tham khảo**

Đk: $\begin{cases}x\geq 0\\ y\geq 1\\ 2y-3x+4\geq 0\end{cases}$ *(nhận thấy x = 0 và y = 1 không thỏa hệ đã cho)*

$(1): 2y^2-3y+1+\sqrt{y-1}=x^2+\sqrt{x}+xy$

$\Leftrightarrow \dfrac{y-1-x}{\sqrt{y-1}+\sqrt{x}}=x^2+xy-2y^2+3y-1$

$\Leftrightarrow (y-x-1)(\dfrac{1}{\sqrt{y-1}+\sqrt{x}}+x+2y-1)=0$; $(\dfrac{1}{\sqrt{y-1}+\sqrt{x}}+x+2y-1>0,\ \forall\begin{cases}x\geq 0\\ y\geq 1\end{cases})$

$\Leftrightarrow y=x+1$

$(2): \sqrt{2x+y}-\sqrt{2y-3x+4}+3x^2-14x-8=0$

$\Leftrightarrow \sqrt{3x+1}-\sqrt{6-x}+3x^2-14x-8=0$

$\Leftrightarrow (\sqrt{3x+1}-4)+(1-\sqrt{6-x})+(x-5)(3x+1)=0$

$\Leftrightarrow (x-5)(\dfrac{3}{\sqrt{3x+1}+4}+\dfrac{1}{1+\sqrt{6-x}}+3x+1)=0$

$\Leftrightarrow x=5$

Vậy nghiệm của hệ là: $\begin{cases}x=5\\ y=6\end{cases}$

**Bài 134: Giải hệ phương trình:** $\begin{cases}x\sqrt{x^2+y}+y=\sqrt{x^4+x^3}+x\\ x+\sqrt{y}+\sqrt{x-1}+\sqrt{y(x-1)}=\dfrac{9}{2}\end{cases}$.

**Lần 2 – THPT THANH HOA**

**Lời giải tham khảo**

Đk: $\begin{cases} x \ge 1 \\ y \ge 0 \end{cases}$

$(1) \Leftrightarrow x(\sqrt{x^2+y} - \sqrt{x^2+x}) + (x-y) = 0$

$\Leftrightarrow x\dfrac{y-x}{\sqrt{x^2+y}+\sqrt{x^2+x}} + x - y = 0 \Leftrightarrow (x-y)(\sqrt{x^2+y}+\sqrt{x^2+x}-x) = 0$

Vì $\begin{cases} x \ge 1 \\ y \ge 0 \end{cases}$ Do đó: $(1) \Leftrightarrow x = y$. Thay vào pt (2) : $x+\sqrt{x}+\sqrt{x-1}+\sqrt{x(x-1)} = \dfrac{9}{2}$

Đặt $t = \sqrt{x}+\sqrt{x-1} (t \ge 0) \Rightarrow t^2 = 2x-1+2\sqrt{x(x-1)}$

Pt trở thành $t^2+1+2t=9$ hay $t^2+2t-8=0$ chỉ lấy t=2 $\Rightarrow \sqrt{x-1}+\sqrt{x} = 2$

$2\sqrt{x(x-1)} = 5-2x \Leftrightarrow \begin{cases} x \le \dfrac{5}{2} \\ 4x^2-4x = 25-20x+4x^2 \end{cases} \Leftrightarrow x = \dfrac{25}{16}$

Vậy hệ có nghiệm duy nhất$\left(\dfrac{25}{16};\dfrac{25}{16}\right)$

**Bài 135: Giải hệ phương trình:** $\begin{cases} 2x^2-5xy-y^2 = y\left(\sqrt{xy-2y^2}+\sqrt{4y^2-xy}\right) \\ \sqrt{3y}+\sqrt{x^2+2x}-x-x\sqrt{2+9y^2} = 0 \end{cases}$.

**Lần 1 – THPT CHUYÊN BIÊN HÒA**

**Lời giải tham khảo**

Điều kiện: $4y \ge x \ge 2y \ge 0$

Với $y = 0$ thì $x = 0$.

Với

$y > 0, (1) \Leftrightarrow 2x^2-5xy-y^2-y\left(\sqrt{xy-2y^2}+\sqrt{4y^2-xy}\right) = 0$

$\Leftrightarrow 2\left(\dfrac{x}{y}\right)^2 - 5\dfrac{x}{y} - 1 - \sqrt{\dfrac{x}{y}-2} - \sqrt{4-\dfrac{x}{y}} = 0$

Đặt $\dfrac{x}{y} = t \Rightarrow t \in [2;4]$

$\Leftrightarrow 2t^2-5t-1-\sqrt{t-2}-\sqrt{4-t} = 0 \Leftrightarrow 2t(t-3)+\sqrt{t-2}(\sqrt{t-2}-1)+(1-\sqrt{4-t}) = 0$

$\Leftrightarrow 2t(t-3)+\dfrac{(t-3)\sqrt{t-2}}{\sqrt{t-2}+1}+\dfrac{t-3}{1+\sqrt{4-t}} = 0 \Leftrightarrow t = 3 \Rightarrow x = 3y$

Thay $x = 3y$ vào (2) ta được:

$\sqrt{x}+\sqrt{x^2+2x}-x-x\sqrt{x^2+2} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x}\left(1+\sqrt{x+2}\right) = x\left(1+\sqrt{x^2+2}\right)$

Xét hàm số $f(t) = t\left(1+\sqrt{t^2+2}\right), f'(t) = 1+\sqrt{t^2+2}+\dfrac{t^2}{\sqrt{t^2+2}} > 0, \forall t \in \mathbb{R}$

$f\left(\sqrt{x}\right) = f\left(x\right) \Leftrightarrow \sqrt{x} = x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \Rightarrow y = 0 \\ x = 1 \Rightarrow y = \dfrac{1}{3} \end{array}\right.$

Vậy hệ phương trình có nghiệm $(0;0), \left(1;\dfrac{1}{3}\right)$

**Bài 136: Giải phương trình:** $2^{\sqrt{x^2+1}}.\log_2\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)=4^x.\log_2(3x)$.

**Lần 2 – THPT CHUYÊN ĐẠI HỌC VINH**

**Lời giải tham khảo**

Điều kiện: $x>0$. Phương trình đã cho tương đương với

$2^{x+\sqrt{x^2+1}}.\log_2\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)=2^{3x}.\log_2(3x)$ (1)

Xét hai trường hợp sau: $2^{x+\sqrt{x^2+1}}.\log_2\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)>2>0>2^{3x}.\log_2(3x)$ (1)

Suy ra (1) không thỏa mãn

TH2: $x\ge\frac{1}{3}$. Ta có $x+\sqrt{x^2+1}$ và $3x$ đều thuộc khoảng $[1;+\infty)$

Xét hàm số $f(t)=2^t.\log_2 t$ trên khoảng $[1;+\infty)$

Ta có $f'(t)=2^t\ln 2.\log_2 t+2^t.\frac{1}{t\ln 2}>0$ với mọi $t$ thuộc khoảng $[1;+\infty)$

Suy ra $f(t)$ đồng biến trên khoảng $[1;+\infty)$

Do đó (1) tương đương với $x+\sqrt{x^2+1}=3x$. Từ đó giải ta được $x=\frac{1}{\sqrt{3}}$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=\frac{1}{\sqrt{3}}$

**Bài 137: Giải hệ phương trình:** $\begin{cases}x^3+y^3+x^2+2y^2+2x+3y+2=0\\ \sqrt{8-xy-x}+2015=\sqrt{x^2+x+y+4}+2016x\end{cases}$.

**Lần 1 – THPT LIÊN SƠN**

**Lời giải tham khảo**

ĐK : $\begin{cases}8-xy-x\ge 0\\ x^2+x+y+4\ge 0\end{cases}$

$(1)\Leftrightarrow y^3+2y^2+3y=-x^3-x^2-2x-2$

$\Leftrightarrow y^3+2y^2+3y=-\left(x^3+3x^2+3x+1\right)+2\left(x^2+2x+1\right)-3x-3$

$\Leftrightarrow y^3+2y^2+3y=(-x-1)^3+2(-x-1)^2+3(-x-1)$

Xét hàm số $f(t)=t^3+2t^2+3t$, $t\in\mathbb{R}$

Có $f'(t)=3t^2+4t+3>0\ \forall t\in\mathbb{R}$, suy ra $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$

Ta được $(1)\Leftrightarrow f(y)=f(-x-1)\Leftrightarrow y=-x-1$

Thay $y=-x-1$ vào $(2)$ và rút gọn được phương trình

$\sqrt{x^2+8}+2015=\sqrt{x^2+3}+2016x$ (*)

Ta có $\sqrt{x^2+8}-\sqrt{x^2+3}=2016x-2015>0\Rightarrow x>\frac{2015}{2016}$

Xét hàm số $g(x)=\sqrt{x^2+8}-\sqrt{x^2+3}-2016x+2015$, $x>\frac{2015}{2016}$

$$g'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+8}} - \frac{x}{\sqrt{x^2+3}} - 2016$$

$$= \frac{x\left(\sqrt{x^2+3} - \sqrt{x^2+8}\right)}{\sqrt{\left(x^2+8\right)\left(x^2+3\right)}} - 2016 < 0 \quad \forall x > \frac{2015}{2016}$$

Suy ra $g(x)$ nghịch biến trên $\left(\frac{2015}{2016}; +\infty\right)$

Suy ra phương trình $g(x) = 0$ (Phương trình (*)) có tối đa 1 nghiệm

Mặt khác $g(1) = 0$

Từ đó ta được $x = 1$ là nghiệm duy nhất của phương trình (*)

Với $x = 1 \Rightarrow y = -2$ (thỏa mãn điều kiện ban đầu)

Vậy hệ đã cho có nghiệm duy nhất $(x; y) = (1; -2)$

**Bài 138: Giải hệ phương trình:** $\begin{cases} \sqrt[3]{x^2+3x+3} + \sqrt[3]{2y^2+3y+2} = (x+y)\left(\frac{2}{3}x+\right) + y^2 + 3 \\ \sqrt{2y^2+3x} - \sqrt{2y+3} - \sqrt[3]{x+y} = 3 - 5x - 2x^2 \end{cases}.$

**Lần 3 – THPT NGUYỄN KHUYẾN**

**Lời giải tham khảo**

**HD:** Từ phương trình (1) của hệ ta có các đánh giá:

$\sqrt[3]{x^2+3x+3} = \sqrt[3]{\left(x^2+3x+3\right).1.1} \le \frac{x^2+3x+5}{3}$ và

$\sqrt[3]{2y^2+3y+2} = \sqrt[3]{\left(2y^2+3y+2\right).1.1} \le \frac{2y^2+3y+4}{3}$

Từ (1) suy ra: $(x+y)\left(\frac{2}{3}x+1\right) = \sqrt[3]{x^2+3x+3} + \sqrt[3]{2y^2+3y+2} \le \frac{x^2+3x+2y^2+3y+9}{3}$

$\Leftrightarrow (x+y)^2 \le 0 \Rightarrow x - y = 0$. Thay $y = -x$ vào phương trình (2), rồi liên hợp ta tìm được nghiệm:

$(x; y) = \left\{\left(\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right), (-3; 3)\right\}$

**Bài 139: Giải hệ phương trình:** $\begin{cases} 5x^3 - 26x^2 + 44x - 20 + 5(1-y)\sqrt{y-1} - 4y = 0 \\ \sqrt{x^2+x-6} + 3\sqrt{x-1} - \sqrt{6x+3y+4} = 0 \end{cases}.$

**Lần 1 – THPT THỪA LƯU**

**Lời giải tham khảo**

Đưa phương trình (1) về dạng hàm số:

$5(x-2)^3 + 4(x-2)^2 = 5\left(\sqrt{y-1}\right)^3 + 4\left(\sqrt{y-1}\right)^2$

$\Leftrightarrow y = x^2 - 4x + 5$

Thay vào phương trình (2) ta được phương trình: $\sqrt{x^2+x-6}+3\sqrt{x-1}-\sqrt{3x^2-6x+19}=0$

Chuyển vế bình phương liên tiếp giải phương trình bậc 4 ( viet đảo + casio) hoặc đặt ẩn phụ đưa về bậc 2,… thử lại có nghiệm: $\left[\begin{array}{l} x=\dfrac{23-\sqrt{341}}{2}\Rightarrow y=\dfrac{353-19\sqrt{341}}{2} \\ x=\dfrac{23+\sqrt{341}}{2}\Rightarrow y=\dfrac{353+19\sqrt{341}}{2}\end{array}\right.$

**Bài 140: Giải hệ phương trình:** $\begin{cases} x-1+\sqrt{x^2-2x+2}=3^{y-1} \\ y-1+\sqrt{y^2-2y+2}=3^{x-1}\end{cases}$.

**Lần 1– THPT ISCHOOL – KHÁNH HÒA**

**Lời giải tham khảo**

Đặt u = x – 1 , v = y – 1 , hệ trở thành $\begin{cases} u+\sqrt{u^2+1}=3^v (1) \\ v+\sqrt{v^2+1}=3^u (2)\end{cases}$

Trừ (1) và (2) vế theo vế ta có $u+\sqrt{u^2+1}+3^u=v+\sqrt{v^2+1}+3^v (*)$.

Xét hàm số $f(t)=t+\sqrt{t^2+1}+3^t$ trên R , $f'(t)=1+\dfrac{t}{\sqrt{t^2+1}}+3^t\ln 3>0,\forall t\in R.$

Do đó $(*)\Leftrightarrow f(u)=f(v)\Leftrightarrow u=v.$ Với u = v thay vào (1) ta được

$u+\sqrt{u^2+1}=3^u \Leftrightarrow \dfrac{-1}{u-\sqrt{u^2+1}}=3^u \Leftrightarrow 3^u\left(\sqrt{u^2+1}-u\right)=1 (**).$

Xét hàm số $g(u)=3^u\left(\sqrt{u^2+1}-u\right), g'(u)=3^u\left(\sqrt{u^2+1}-u\right)\left(\ln 3-\dfrac{1}{\sqrt{u^2+1}}\right)>0,\forall u\in R.$

Mặt khác g(0) = 0 do đó (**) có nghiệm duy nhất u = 0. Với u = 0 ⇒ v= 0 ⇒ x = y = 1.

Vậy hệ có nghiệm duy nhất (x;y) = (1;1).

**Bài 141: Giải hệ phương trình:** $\begin{cases} \sqrt{2x-y-1}+\sqrt{3y+1}=\sqrt{x}+\sqrt{x+2y} \\ x^2+x+3y+17-6\sqrt{x+7}-2x\sqrt{3y+1}=0\end{cases}$.

**Lần 2 – THPT THUẬN THÀNH 1**

**Lời giải tham khảo**

ĐK: $\begin{cases} x\ge 0 \\ y\ge -\dfrac{1}{3} \\ 2x-y-1\ge 0 \\ x+2y\ge 0\end{cases}$

$(1)\Leftrightarrow \sqrt{2x-y-1}-\sqrt{x}+\sqrt{3y+1}-\sqrt{x+2y}=0$

* Nhận xét:

- Nếu $\begin{cases} \sqrt{2x-y-1}=0 \\ \sqrt{x}=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=-1 \quad (L)\end{cases} \Rightarrow \sqrt{2x-y-1}+\sqrt{x}>0$

- Nếu $\begin{cases}\sqrt{3y+1}-=0\\ \sqrt{x+2y}=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x=\dfrac{2}{3}\\ y=-\dfrac{1}{3}\end{cases}$. Thay vào PT(2) thấy không thỏa mãn

$\Rightarrow \sqrt{3y+1}+\sqrt{x+2y}>0$

$\Leftrightarrow \dfrac{x-y-1}{\sqrt{2x-y-1}+\sqrt{x}}-\dfrac{x-y-1}{\sqrt{3y+1}+\sqrt{x+2y}}=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x-y-1=0\\ \sqrt{2x-y-1}+\sqrt{x}=\sqrt{3y+1}+\sqrt{x+2y}\end{array}\right.$

+ TH1: $x-y-1=0 \Leftrightarrow y=x-1$. Thế vào PT (2) ta được:

$x^2+4x+14-6\sqrt{x+7}-2x\sqrt{3x-2}=0$ (3). ĐK: $x\ge\dfrac{2}{3}$

$(3)\Leftrightarrow 2\left[6\sqrt{x+7}-(x+16)\right]+x\left[4\sqrt{3x-2}-(3x+2)\right]+x^2-4x+4=0$

$\Leftrightarrow -(x^2-4x+4)\left(\dfrac{2}{6\sqrt{x+7}+x+16}+\dfrac{9x}{4\sqrt{3x-2}+3x+2}-1\right)=0$

$\Leftrightarrow (x-2)^2\left(\dfrac{2}{6\sqrt{x+7}+x+16}+\dfrac{6x-2-4\sqrt{3x-2}}{4\sqrt{3x-2}+3x+2}\right)=0$

$\Leftrightarrow (x-2)^2\left(\dfrac{2}{6\sqrt{x+7}+x+16}+\dfrac{2\left(\sqrt{3x-2}-1\right)^2}{4\sqrt{3x-2}+3x+2}\right)=0$

$\Leftrightarrow x=2$ (TM) $\Rightarrow y=1$ (TM).◎+ TH2: $\sqrt{2x-y-1}+\sqrt{x}=\sqrt{3y+1}+\sqrt{x+2y}$

+ TH2: $\sqrt{2x-y-1}+\sqrt{x}=\sqrt{3y+1}+\sqrt{x+2y}$

Ta có: $\begin{cases}\sqrt{2x-y-1}+\sqrt{3y+1}=\sqrt{x}+\sqrt{x+2y}\\ \sqrt{2x-y-1}+\sqrt{x}=\sqrt{3y+1}+\sqrt{x+2y}\end{cases}$

Trừ hai vế tương ứng của hai phương trình ta được:

$\sqrt{x}=\sqrt{3y+1}\Leftrightarrow 3y=x-1$. ◎Thế vào PT (2) ta được:

Thế vào PT (2) ta được:

$x^2+2x+16-6\sqrt{x+7}-2x\sqrt{x}=0$ (4). ĐK: $x\ge 0$

PT(4)$\Leftrightarrow \left(\sqrt{x+7}-3\right)^2+\left(x-\sqrt{x}\right)^2=0$

$\Leftrightarrow \begin{cases}\sqrt{x+7}-3=0\\ x-\sqrt{x}=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=2\\ x=0\end{cases}$ (vô lý) $\Rightarrow$ PT vô nghiệm

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm (x; y) = (2; 1)

**Bài 142: Giải hệ phương trình:**

$$\begin{cases} 2+6y=\dfrac{x}{y}-\sqrt{x-2y} \\ 3^{\sqrt{x+\sqrt{x-2y}}+2}.2^{2x+6y-3}+9.2^{2x+6y-3}=2^{2\sqrt{x+\sqrt{x-2y}}+1}.3^{x+3y}+18.4^{\sqrt{x+\sqrt{x-2y}}} \end{cases}.$$

**Lần 1 – THPT TĨNH GIA 1**

**Lời giải tham khảo**

Phương trình (1) $\Leftrightarrow \left(2y+\sqrt{x-2y}\right)\left(3y-\sqrt{x-2y}\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -2y=\sqrt{x-2y} \\ 3y=\sqrt{x-2y} \end{array}\right.$

Từ :

$$(2)\Leftrightarrow 3^{\sqrt{x+\sqrt{x-2y}}}.2^{2x+6y-4}+2^{2x+6y-4}=2^{2\sqrt{x+\sqrt{x-2y}}}.3^{x+3y-2}+4^{\sqrt{x+\sqrt{x-2y}}}$$

$$\Leftrightarrow 4^{x+3y-2}\left(3^{\sqrt{x+\sqrt{x-2y}}}+1\right)=4^{\sqrt{x+\sqrt{x-2y}}}\left(3^{x+3y-2}+1\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{3^{\sqrt{x+\sqrt{x-2y}}}+1}{4^{\sqrt{x+\sqrt{x-2y}}}}=\frac{3^{x+3y-2}+1}{4^{x+3y-2}}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x+\sqrt{x-2y}}=x+3y-2$$

TH1: $\begin{cases} -2y=\sqrt{x-2y} \\ \sqrt{x+\sqrt{x-2y}}=x+3y-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+5y=2 \\ 4y^2+2y=x \\ y\le 0 \\ x\ge 2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=12 \\ y=-2 \end{cases}$

TH2: $\begin{cases} 3y=\sqrt{x-2y} \\ \sqrt{x+\sqrt{x-2y}}=x+3y-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9y^2+2y=x \\ x+3y=4 \\ y\ge 0 \\ x\ge 2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{8}{3} \\ y=\dfrac{4}{9} \end{cases}$

**Bài 143: Giải hệ phương trình:** $\begin{cases} \sqrt{x^2+y}+\sqrt{3}=\sqrt{y^2-3x}+\sqrt{7} \\ \sqrt{y-1}+2y^2+1=\sqrt{x}+x^2+xy+3y \end{cases}.$

**Lần 1 – THPT TÔ VĂN ƠN**

**Lời giải tham khảo**

Ta có hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt{x^2+y}+\sqrt{3}=\sqrt{y^2-3x}+\sqrt{7} \quad (1) \\ \sqrt{y-1}+2y^2+1=\sqrt{x}+x^2+xy+3y \quad (2) \end{cases}$

Điều kiện: $y\ge 1, x\ge 0, y^2\ge 3x$. (2) $\Leftrightarrow \sqrt{y-1}-\sqrt{x}+(y^2-2y+1)-x^2+(y^2-xy-y)=0$

$$\Leftrightarrow \frac{y-1-x}{\sqrt{y-1}+\sqrt{x}}+(y-1)^2-x^2+y(y-x-1)=0$$

$$\Leftrightarrow (y-x-1)\left(\frac{1}{\sqrt{y-1}+\sqrt{x}}+2y-1+x\right)=0$$

$\Leftrightarrow y = x + 1 \quad \left( \text{Do } \frac{1}{\sqrt{y-1}+\sqrt{x}} + 2y - 1 + x > 0, \forall y \geq 1, \forall x \geq 0 \right)$

+) Thế $y$ vào (1) ta được $\sqrt{x^2+x+1} - \sqrt{x^2-x+1} = \sqrt{7} - \sqrt{3}$ (3)

Xét $f(x) = \sqrt{x^2+x+1} - \sqrt{x^2-x+1}$,

$f'(x) = \frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x+1}} - \frac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x+1}} = \frac{2x+1}{\sqrt{(2x+1)^2+3}} - \frac{2x-1}{\sqrt{(2x-1)^2+3}}$

Xét $g(t) = \frac{t}{\sqrt{t^2+3}}, g'(t) = \frac{3}{\sqrt{(t^2+3)^3}} > 0, \forall t \in \mathbb{R}$ suy ra g(t) đồng biến trên $\mathbb{R}$

Do $2x+1 > 2x-1$ nên $g(2x+1) > g(2x-1)$ suy ra $f'(x) = g(2x+1) - g(2x-1) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$

Do đó $f(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$, nên (3) $\Leftrightarrow f(x) = f(2) \Leftrightarrow x = 2 \Rightarrow y = 3$

Vậy hệ đã cho có nghiệm $(x; y) = (2;3)$

**Bài 144: Giải hệ phương trình:** $\begin{cases} x(x+y) + \sqrt{x+y} = \sqrt{2y}(\sqrt{2y^3}+1) \\ x^2y - 5x^2 + 7(x+y) = 4 + 6\sqrt[3]{xy-x+1} \end{cases}$.

**Lần 2 – THPT TÔ VĂN ƠN**

**Lời giải tham khảo**

+ĐK x+ y $\geq 0$ ; y $\geq 0$

+ y = 0 hệ không có nghiệm

+ y > 0 , ta có : $x^2y + y - 2y^2 + \sqrt{x+y} - \sqrt{2y} = 0$

$\Leftrightarrow (x-y)(x+2y) + \sqrt{x+y} - \sqrt{2y} = 0$

$\Leftrightarrow (x-y)(x+2y+\frac{1}{\sqrt{x+y}+\sqrt{2y}}) = 0 \Leftrightarrow x = y$

+ Ta có : $x^3 - 5x^2 + 14x - 4 = 6\sqrt[3]{x^2-x-1}$

$\Leftrightarrow (x+1)^3 + 3(x+1) = 8x^2 - 8x + 8 + 3\sqrt[3]{8x^2-8x+8}$

+ Xét hàm số f(t) = $t^3 + 3t$ trên R , y' = $3t^2 + 3 > 0$, mọi t thuộc R

Mà f(x+1) = $f(\sqrt[3]{8x^2-8x-8}) \Rightarrow$ x+1 = $\sqrt[3]{8x^2-8x-8} \Rightarrow x = 1$

Vậy hệ có nghiệm duy nhất (1;1)

**Bài 145: Giải hệ phương trình:** $\begin{cases} (1-y)(x-3y+3) - x^2 = \sqrt{(y-1)^3}.\sqrt{x} \\ \sqrt{x^2-y} + 2\sqrt[3]{x^3-4} = 2(y-2) \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R})$.

**Lần 1– THPT TÔN ĐỨC THẮNG**

**Lời giải tham khảo**

ĐKXĐ: $\begin{cases} x^2 - y \geq 0 \\ x \geq 0, y \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 \geq y \\ x \geq 1, y \geq 1 \end{cases}$

Nhận xét $x \geq 1, y = 1$ không là nghiệm của hệ. Xét $y > 1$ thì pt (1) của hệ (I)

$x^2 + x(y-1) - 3(y-1)^2 + (y-1)\sqrt{x(y-1)} = 0$

$\Leftrightarrow\left(\dfrac{x}{y-1}\right)^2+\dfrac{x}{y-1}-3+\sqrt{\dfrac{x}{y-1}}=0$ ◎$t=\sqrt{\dfrac{x}{y-1}},t>0$ . Khi đó, pt (1) trở thành:

$t=\sqrt{\dfrac{x}{y-1}},t>0$ . Khi đó, pt (1) trở thành:

$t^4+t^2+t-3=0\Leftrightarrow(t-1)\left(t^3+t^2+2t+3\right)=0\Leftrightarrow t=1.$

Với t = 1, thì $\sqrt{\dfrac{x}{y-1}}=1\Leftrightarrow y=x+1$ , thế vào pt(2), ta được

$\sqrt{x^2-x-1}+2\sqrt[3]{x^3-4}=2(x-1)\Leftrightarrow\sqrt{x^2-x-1}+2\left[\sqrt[3]{x^3-4}-(x-1)\right]=0$

$$\Leftrightarrow\sqrt{x^2-x-1}+6\left[\frac{x^2-x-1}{\sqrt[3]{\left(x^3-4\right)^2}++(x-1)\sqrt[3]{x^3-4}+(x-1)^2}\right]=0$$

$$\Leftrightarrow\sqrt{x^2-x-1}\left(1+\frac{6\sqrt{x^2-x-1}}{\sqrt[3]{\left(x^3-4\right)^2}++(x-1)\sqrt[3]{x^3-4}+(x-1)^2}\right)=0$$

$\Leftrightarrow\sqrt{x^2-x-1}=0\Leftrightarrow x=\dfrac{1+\sqrt5}{2}\quad(x\ge1).$

Với $x=\dfrac{1+\sqrt5}{2}\Rightarrow y=\dfrac{3+\sqrt5}{2}.$

Đối chiếu ĐK, hệ phương có nghiệm : $(x;y)=\left(\dfrac{1+\sqrt5}{2};\dfrac{3+\sqrt5}{2}\right).$

**Bài 146: Giải hệ phương trình:** $\begin{cases}y^6-3y^4+4y^2=x^3+6x^2+13x+12\\ \sqrt{x+2}+\sqrt[3]{y^2+3}=4\end{cases}$ .

**Lần 1– THPT TRẦN BÌNH TRỌNG**

**Lời giải tham khảo**

Điều kiện: $x+2y+1\ge0$

Đặt t = $\sqrt{x+2y+1}$ (t ≥ 0) ◎Phương trình (1) trở thành : 2t² – t – 6 = 0 $\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=2\\ t=-\dfrac{3}{2}(\text{loại})\end{array}\right.$

Phương trình (1) trở thành : 2t² – t – 6 = 0 $\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=2\\ t=-\dfrac{3}{2}(\text{loại})\end{array}\right.$

+ Hệ $\Leftrightarrow\begin{cases}x+2y=3\\ x^2-4y^2+3xy=6\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}x=2\\ y=\dfrac{1}{2}\end{cases}\vee\begin{cases}x=5\\ y=-1\end{cases}$

**KẾT LUẬN:**

**Bài 147: Giải hệ phương trình:** $\begin{cases} 2x^2+\sqrt{2x}=(x+y)y+\sqrt{x+y} \\ \sqrt{x-1}+xy=\sqrt{y^2+21} \end{cases}$.

**Lần 1– THPT TRẦN PHÚ**

**Lời giải tham khảo**

Điều kiện xác định $x\ge 1, x+y\ge 0$

Khi đó $2x^2+\sqrt{2x}=(x+y)y+\sqrt{x+y} \Leftrightarrow 2x^2-xy-y^2+\sqrt{2x}-\sqrt{x+y}=0$

$$\Leftrightarrow (x-y)(2x+y)+\frac{x-y}{\sqrt{2x}+\sqrt{x+y}}=0 \Leftrightarrow (x-y)\left(2x+y+\frac{1}{\sqrt{2x}+\sqrt{x+y}}\right)=0.$$

Do $x\ge 1, x+y\ge 0 \Rightarrow 2x+y>0$, từ đó suy ra $x=y$.◎Thay vào (2) ta có

$$\sqrt{x-1}+x^2=\sqrt{x^2+21} \Leftrightarrow \sqrt{x-1}-1+x^2-4=\sqrt{x^2+21}-5$$

Thay vào (2) ta có $\sqrt{x-1}+x^2=\sqrt{x^2+21} \Leftrightarrow \sqrt{x-1}-1+x^2-4=\sqrt{x^2+21}-5$

$$\Leftrightarrow (x-2)\left(\frac{1}{\sqrt{x-1}+1}+x+2-\frac{x+2}{\sqrt{x^2+21}+5}\right)=0 \ (3)$$

Vì $x+2-\dfrac{x+2}{\sqrt{x^2+21}+5}=(x+2)\left(1-\dfrac{1}{10+\sqrt{x^2+91}}\right)>0$, từ (3) suy ra $x=2$

Vậy nghiệm của hệ phương trình là $(2;2)$.

**Bài 148: Giải hệ phương trình:** $\begin{cases} x^2+xy(2y-1)=2y^3-2y^2-x \\ 6\sqrt{x-1}+y+7=4x(y-1) \end{cases}$.

**Lần 2 – THPT TRẦN PHÚ**

**Lời giải tham khảo**

ĐK: $x\ge 1$.

$(1) \Leftrightarrow (2y^2+x)(1+x-y)=0 \Leftrightarrow y=x+1$ vì $2y^2+x>0, \forall x\ge 1$

Thay vào (2) ta được $6\sqrt{x-1}+x+8=4x^2 \Leftrightarrow \left(\sqrt{x-1}+3\right)^2=(2x)^2 \Leftrightarrow 2x=\sqrt{x-1}+3$

$$\Leftrightarrow 2x-3=\sqrt{x-1} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x^2-13x+10=0 \\ x\ge \dfrac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x=2 \Rightarrow y=3$$

Vậy nghiệm của phương trình là $(x;y)=(2;3)$

**Bài 149: Giải hệ phương trình:** $\begin{cases} xy-y^2+2y-x-1=\sqrt{y-1}-\sqrt{x} \\ 3.\sqrt{6-y}+3.\sqrt{2x+3y-7}=2x+7 \end{cases}$.

**Lần 3 – THPT TRẦN QUANG KHẢI**

**Lời giải tham khảo**

Điều kiện: $x\ge 0, 1\le y\le 6, 2x+3y-7\ge 0$ (*)

Nhận thấy $\begin{cases} x=0 \\ y=1 \end{cases}$ không là nghiệm của hệ phương trình $\Rightarrow \sqrt{y-1}+\sqrt{x} \neq 0$ (*). Khi đó,

$$\text{PT (1)} \Leftrightarrow x(y-1)-(y-1)^2 = \frac{y-1-x}{\sqrt{y-1}+\sqrt{x}}$$

Khi đó, $\text{PT (1)} \Leftrightarrow x(y-1)-(y-1)^2 = \dfrac{y-1-x}{\sqrt{y-1}+\sqrt{x}}$

$$\Leftrightarrow (x-y+1)\left(y-1+\frac{1}{\sqrt{y-1}+\sqrt{x}}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow x-y+1=0 \Leftrightarrow y=x+1 \text{ (do (*))}$$

Thay vào PT (2) ta được: $3\sqrt{5-x}+3\sqrt{5x-4}=2x+7$ ĐK: $4/5 \le x \le 5$

$$\Leftrightarrow (7-x)-3\sqrt{5-x}+3(x-\sqrt{5x-4})=0$$

$$\Leftrightarrow (4-5x+x^2)\left(\frac{1}{3\sqrt{5-x}+(7-x)}+\frac{3}{\sqrt{5x-4}+x}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow x^2-5x+4=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \Rightarrow y=2 \\ x=4 \Rightarrow y=5 \end{array}\right.$$

Vậy nghiệm của hệ phương trình là: $\boxed{(1;2),\ (4;5).}$

**Bài 150: Giải hệ phương trình:** $\begin{cases} x^3-y^3+3y^2+x-4y+2=0 \\ x^3+x-3=2\sqrt{x+2}+y \end{cases}$ $(x,y \in \mathbb{R})$.

**Lần 1 – THPT TRẦN QUÝ CÁP**

**Lời giải tham khảo**

Điều kiện: $x \ge -2$.

(1) $\Leftrightarrow x^3+x+2=y^3-3y^2+4y \Leftrightarrow x^3+x+2=(y-1)^3+(y-1)+2$ (*). Xét hàm số $f(t)=t^3+t+2$ trên $[-2;+\infty)$.

Xét hàm số $f(t)=t^3+t+2$ trên $[-2;+\infty)$.

Ta có: $f'(t)=3t^2+1>0, \forall t \in [-2;+\infty)$.

Mà $f(t)$ liên tục trên $[-2;+\infty)$, suy ra hàm số $f(t)$ đồng biến trên $[-2;+\infty)$.

Do đó: $x=y-1$.

Thay $y=x+1$ và phương trình (2) ta được: $x^3-3=2\sqrt{x+2}+1$

$$\Leftrightarrow x^3-8=2\left(\sqrt{x+2}-2\right) \Leftrightarrow (x-2)\left(x^2+2x+4\right)=\frac{2\left(\sqrt{x+2}-2\right)\left(\sqrt{x+2}+2\right)}{\left(\sqrt{x+2}+2\right)}$$

$$\Leftrightarrow (x-2)\left(x^2+2x+4\right)=\frac{2(x-2)}{\left(\sqrt{x+2}+2\right)} \Leftrightarrow (x-2)\left[x^2+2x+4-\frac{2}{\left(\sqrt{x+2}+2\right)}\right]=0$$

- $x-2=0 \Leftrightarrow x=2 \Rightarrow y=3$
- $x^2+2x+4-\dfrac{2}{\left(\sqrt{x+2}+2\right)}=0 \Leftrightarrow x^2+2x+4=\dfrac{2}{\left(\sqrt{x+2}+2\right)}$ (*)

Ta có $VT = x^2 + 2x + 4 = (x+1)^2 + 3 \ge 3; VP = \frac{2}{\sqrt{x+2}+2} \le 1, \forall x \in [-2;+\infty)$

Do đó phương trình (*) vô nghiệm.

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $(x;y) = (2;3)$ ◎

**Bài 151: Giải hệ phương trình:** $\begin{cases} (2x+\sqrt{4x^2+1})(2y+\sqrt{4y^2+1}) = 1 \\ \sqrt[3]{x^4 - x^2} + 4 = 4y^2 + 3y \end{cases}$ $(x, y \in \mathbb{R})$.

**Lần 1 – THPT TRẦN PHÚ – VĨNH PHÚC**

**Lời giải tham khảo**

$2y + \sqrt{4y^2+1} = \sqrt{4x^2+1} - 2x \Leftrightarrow 2y + \sqrt{(2y)^2+1} = \sqrt{(-2x)^2+1} + (-2x)$ (*)

Xét hàm số $f(t) = t + \sqrt{t^2+1}$ trên R

Ta có $f'(t) = 1 + \frac{t}{\sqrt{t^2+1}} = \frac{\sqrt{t^2+1}+t}{\sqrt{t^2+1}} \ge 0, \forall t$ suy ra hàm số đồng biến trên R◎(*) $\Leftrightarrow x = -y$

(*) $\Leftrightarrow x = -y$

Thay vào (2) ta được $\sqrt[3]{x^4 - x^2} + 4 = 4x^2 - 3x \quad \Leftrightarrow \sqrt[3]{x^4 - x^2} - 4(x^2-1) + 3x = 0$

$\Leftrightarrow \sqrt[3]{\frac{(x^2-1)}{x}} - 4\frac{x^2-1}{x} + 3 = 0$ (chia 2 vế cho x vì x=0 không thỏa mãn)

Đặt $\sqrt[3]{\frac{(x^2-1)}{x}} = t$. PTTT: $4t^3 - t - 3 = 0 \Leftrightarrow t = 1$

Với t=1 $\sqrt[3]{\frac{(x^2-1)}{x}} = 1 \Leftrightarrow x^2 - 1 = x \Leftrightarrow x^2 - x - 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ x = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{array}\right.$ suy ra $\left[\begin{array}{l} y = \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \\ y = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \end{array}\right.$

Vậy, hệ phương trình đã cho có 2 cặp nghiệm $(x;y)$.

**Bài 152: Giải bất phương trình:** $\sqrt{x+1} \ge \frac{x^2 - x - 2\sqrt[3]{2x+1}}{\sqrt[3]{2x+1} - 3}$.

**Lần 1 – THPT TRIỆU SƠN 1**

**Lời giải tham khảo**

- ĐK: $x \ge -1, x \ne 13$

- Khi đó: $\sqrt{x+1} \ge \frac{x^2 - x - 2\sqrt[3]{2x+1}}{\sqrt[3]{2x+1} - 3} \Leftrightarrow \sqrt{x+1} + 2 \ge \frac{x^2 - x - 6}{\sqrt[3]{2x+1} - 3}$

$$\Leftrightarrow 1 \ge \frac{(x+2)\left(\sqrt{x+1} - 2\right)}{\sqrt[3]{2x+1} - 3}, (*)$$

- Nếu $\sqrt[3]{2x+1} - 3 > 0 \Leftrightarrow x > 13$ (1)

thì (*) $\Leftrightarrow (2x+1) + \sqrt[3]{2x+1} \ge (x+1)\sqrt{x+1} + \sqrt{x+1}$

Do hàm $f(t) = t^3 + t$ là hàm đồng biến trên $\mathbb{R}$, mà (*):

$$f\left(\sqrt[3]{2x+1}\right) \ge f\left(\sqrt{x+1}\right) \Leftrightarrow \sqrt[3]{2x+1} \ge \sqrt{x+1} \Leftrightarrow x^3 - x^2 - x \le 0$$

Suy ra: $x\in\left(-\infty;\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right]\cup\left[0;\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right]\xrightarrow{DK(1)}VN$

- Nếu $\sqrt[3]{2x+1}-3<0\Leftrightarrow -1\le x<13$ (2)

thì (2*) $\Leftrightarrow(2x+1)+\sqrt[3]{2x+1}\le(x+1)\sqrt{x+1}+\sqrt{x+1}$

Do hàm $f(t)=t^3+t$ là hàm đồng biến trên $\mathbb{R}$, mà (2*):

$$f\left(\sqrt[3]{2x+1}\right)\le f\left(\sqrt{x+1}\right)\Leftrightarrow\sqrt[3]{2x+1}\le\sqrt{x+1}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}-1\le x\le-\frac{1}{2}\\ \begin{cases}-\frac{1}{2}<x<13\\ (2x+1)^2\le(x+1)^3\end{cases}\end{array}\right.$$

Suy ra: $x\in[-1;0]\cup\left[\frac{1+\sqrt{5}}{2};+\infty\right)\xrightarrow{DK(2)}x\in[-1;0]\cup\left[\frac{1+\sqrt{5}}{2};13\right)$

-KL: $x\in[-1;0]\cup\left[\frac{1+\sqrt{5}}{2};13\right)$

**Bài 153: Giải hệ phương trình:** $\begin{cases}x\sqrt{x^2+y}+y=\sqrt{x^4+x^3}+x & (1)\\ x+\sqrt{y}+\sqrt{x-1}+\sqrt{y(x-1)}=\dfrac{9}{2} & (2)\end{cases}$.

**Lần 1 – THPT DÂN LẬP LÊ THÁNH TÔN**

**Lời giải tham khảo**

Đk: $\begin{cases}x\ge1\\ y\ge0\end{cases}$

$(1)\Leftrightarrow x(\sqrt{x^2+y}-\sqrt{x^2+x})+(x-y)=0$

$\Leftrightarrow x\dfrac{y-x}{\sqrt{x^2+y}+\sqrt{x^2+x}}+x-y=0\Leftrightarrow(x-y)(\sqrt{x^2+y}+\sqrt{x^2+x}-x)=0$

$(\sqrt{x^2+y}+\sqrt{x^2+x}-x)=0(vn)$

Do đ ó x=y thay v ào pt (2) : $x+\sqrt{x}+\sqrt{x-1}+\sqrt{x(x-1)}=\dfrac{9}{2}$

Đ ặt $t=\sqrt{x}+\sqrt{x-1}(t\ge0)\Rightarrow t^2=2x-1+2\sqrt{x(x-1)}$

Pt trở thành $t^2+1+2t=9$ hay $t^2+2t-8=0$ chỉ lấy t=2 $\Rightarrow\sqrt{x-1}+\sqrt{x}=2$

$2\sqrt{x(x-1)}=5-2x\Leftrightarrow\begin{cases}x\le\dfrac{5}{2}\\ 4x^2-4x=25-20x+4x^2\end{cases}\Leftrightarrow x=\dfrac{25}{16}$

Vậy hệ có nghiệm duy nhất$\left(\dfrac{25}{16};\dfrac{25}{16}\right)$

**Bài 154: Giải hệ phương trình:** $\begin{cases}(xy-3)\sqrt{y+2}+\sqrt{x}=\sqrt{x^5}+(y-3x)\sqrt{y+2}\\ \sqrt{9x^2+16}-2\sqrt{2y+8}=4\sqrt{2-x}\end{cases}$.

**Lần 1 – THPT TƯƠNG DƯƠNG**

**Lời giải tham khảo**

Đk: $\begin{cases} 0 \le x \le 2 \\ y \ge -2 \end{cases}$ (*). Với đk(*) ta có

$(1) \Leftrightarrow (x-1)\left[(y+3)\sqrt{y+2}-(x+1)\sqrt{x}\right]=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ (y+3)\sqrt{y+2}=(x+1)\sqrt{x} \quad (3) \end{array}\right.$

Với x = 1 thay vào (2) ta được: $2\sqrt{2y+8}=1 \Leftrightarrow y=-\frac{31}{8}(loai)$

Ta có: $(3) \Leftrightarrow \left(\sqrt{y+2}\right)^3+\sqrt{y+2}=(\sqrt{x})^3+\sqrt{x}$ (4). Xét hàm số

$f(t)=t^3+t \Rightarrow f'(t)=3t^2+1>0; \forall t \Rightarrow$ Hàm số f(t) là hs đồng biến, do đó:

$(4) \Leftrightarrow f(\sqrt{y+2})=f(\sqrt{x}) \Leftrightarrow \sqrt{y+2}=\sqrt{x} \Leftrightarrow y=x-2$ thay vào pt(2) ta được:

$4\sqrt{2-x}+2\sqrt{2x+4}=\sqrt{9x^2+16}$

$\Leftrightarrow 32-8x+16\sqrt{2(4-x^2)}=9x^2 \Leftrightarrow 8(4-x^2)+16\sqrt{2(4-x^2)}-(x^2+8x)=0$

Đặt: $t=\sqrt{2(4-x^2)}$ $(t \ge 0)$; PT trở thành: $4t^2+16t-(x^2+8x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=\frac{x}{2} \\ t=-\frac{x}{2}-4<0(loai) \end{array}\right.$

Hay $\sqrt{2(4-x^2)}=\frac{x}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \le x \le 2 \\ x^2=\frac{32}{9} \end{cases} \Leftrightarrow x=\frac{4\sqrt{2}}{3} \Rightarrow y=\frac{4\sqrt{2}-6}{3}$

Vậy hệ pt có nghiệm (x; y) là: $\left(\frac{4\sqrt{2}}{3};\frac{4\sqrt{2}-6}{3}\right)$ ◎

**Bài 155: Giải hệ phương trình:** $\begin{cases} \frac{y}{x}+x-\frac{1}{2x}=3\sqrt{\frac{2y-1}{4}} \\ x^2-y=\sqrt{3y-1} \end{cases}$.

**Lần 1 – THPT VĂN GIANG**

**Lời giải tham khảo**

Điều kiện: $x \ne 0; y \ge \frac{1}{2}$

$(1) \Leftrightarrow \frac{y}{x}+x-\frac{1}{2x}=3\sqrt{\frac{2y-1}{4}} \Leftrightarrow 2y+2x^2-1=3x\sqrt{2y-1}$

$\Leftrightarrow (2y-1)-3x\sqrt{2y-1}+2x^2=0$

$\Leftrightarrow \frac{2y-1}{x^2}-3\frac{\sqrt{2y-1}}{x}+2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{\sqrt{2y-1}}{x}=1 \\ \frac{\sqrt{2y-1}}{x}=2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\sqrt{2y-1} \\ x=\frac{1}{2}\sqrt{2y-1} \end{array}\right.$

Với $x=\sqrt{2y-1}$ thay vào phương trình (2):

$\sqrt{3y-1}=y-1 \Leftrightarrow \begin{cases} y \ge 1 \\ y^2-5y+2=0 \end{cases} \Leftrightarrow y=\frac{5+\sqrt{17}}{2}$

Suy ra $x=\sqrt{4+\sqrt{17}}$ ( thoả mãn)◎Với $x=\frac{1}{2}\sqrt{2y-1}$ thay vào phương trình (2)

Với $x=\frac{1}{2}\sqrt{2y-1}$ thay vào phương trình (2)

Ta được: $-\frac{y}{2}-\frac{1}{4}=\sqrt{3y-1}$. Do $y\geq\frac{1}{2}\Rightarrow-\frac{y}{2}-\frac{1}{4}<0$. Vậy phương trình vô nghiệm

Kết luận: Hệ có nghiệm duy nhất: $\begin{cases}x=\sqrt{4+\sqrt{17}}\\ y=\dfrac{5+\sqrt{17}}{2}\end{cases}$

**Bài 156: Giải hệ phương trình:** $\begin{cases}x+3\sqrt{xy+x-y^2-y}=5y+4\\ (y-x)(y+1)+(y^2-2)\sqrt{1+x}=1\end{cases}$ $(x,y\in\mathbb{R})$.

**Lần 1 – THPT VẠN NINH**

**Lời giải tham khảo**

ĐK: $\begin{cases}xy+x-y^2-y\geq 0\\ x\geq -1\end{cases}$

Từ ( 1) ta có: $(x-y)+3\sqrt{(x-y)(y+1)}-4(y+1)=0\Leftrightarrow\frac{x-y}{y+1}+3\sqrt{\frac{x-y}{y+1}}-4=0$

(Vì $y=-1$ không thoả (2) )$\Rightarrow\frac{x-y}{y+1}=1\Rightarrow x=2y+1$ (3)

Từ ( 2) ta có: $(y^2-2)(\sqrt{1+x}+1)=(x-1)(y+1)\Leftrightarrow\frac{y^2-2}{y+1}=\frac{(x+1)-2}{\sqrt{x+1}+1}$ (4)

Xét hàm $f(t)=\frac{t^2-2}{t+1}\Rightarrow f'(t)=1+\frac{1}{(t+1)^2}>0;\forall t\neq-1\Rightarrow f(t)$ đồng biến trên $[0;+\infty)$

Do đó từ (4) ta có: $f(y)=f(\sqrt{x+1})\Leftrightarrow y=\sqrt{x+1}\Leftrightarrow\begin{cases}y\geq 0\\ x=y^2-1\end{cases}$ (5)

Từ (3) và (5) giải được : $y=1-\sqrt{3}$ (loại) ; $y=1+\sqrt{3}$ (nhận) $\Rightarrow x=3+2\sqrt{3}$

Hệ có nghiệm : ( $x=3+2\sqrt{3}$ ; $y=1+\sqrt{3}$ )

**Bài 157: Giải hệ phương trình:** $\begin{cases}\sqrt{x+y}-\sqrt{x-y}=2\\ \sqrt{x^2+y^2+1}=3+\sqrt{x^2-y^2}\end{cases}$.

**Lần 2 – THPT VẠN NINH**

**Lời giải tham khảo**

Điều kiện: $x+y\geq 0$, $x-y\geq 0$

Đặt: $\begin{cases}u=x+y\\ v=x-y\end{cases}$ ta có hệ: $\begin{cases}\sqrt{u}-\sqrt{v}=2\ (u>v)\\ \sqrt{\dfrac{u^2+v^2+2}{2}}-\sqrt{uv}=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u+v=2\sqrt{uv}+4\\ \sqrt{\dfrac{u^2+v^2+2}{2}}-\sqrt{uv}=3\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}u+v=2\sqrt{uv}+4 & (1)\\ \sqrt{\dfrac{(u+v)^2-2uv+2}{2}}-\sqrt{uv}=3\ (2)\end{cases}$.

Thế (1) vào (2) ta có:

$\sqrt{uv+8\sqrt{uv}+9}-\sqrt{uv}=3 \Leftrightarrow uv+8\sqrt{uv}+9=(3+\sqrt{uv})^2 \Leftrightarrow uv=0$.

Kết hợp (1) ta có: $\begin{cases} uv=0 \\ u+v=4 \end{cases} \Leftrightarrow u=4, v=0$ (vì $u>v$).

Từ đó ta có: $x = 2$; $y = 2$.(Thỏa đ/k)

KL: Vậy nghiệm của hệ là: $(x; y)=(2; 2)$.

**Bài 158: Giải hệ phương trình:** $\begin{cases} 4x^2+y-x-9=\sqrt{1+3x}+\sqrt{y+x^2+5x-8} \\ x^4+x^3-11x^2+yx^2+(y-12)x=12-y \end{cases}$.

**Lần 2 – THPT VIỆT TRÌ**

**Lời giải tham khảo**

Phương trình (2) tương đương với

$(x^2+x+1)(y-12+x^2)=0 \Leftrightarrow y=12-x^2$

Thay vào phương trình (1) ta được: $3x^2-x+3=\sqrt{3x+1}+\sqrt{5x+4}$

$\Leftrightarrow 3(x^2-x)+\left(x+1-\sqrt{3x+1}\right)+\left(x+2-\sqrt{5x+4}\right)=0$

$\Leftrightarrow (x^2-x)\left(3+\dfrac{1}{x+1+\sqrt{3x+1}}+\dfrac{1}{x+2+\sqrt{5x+4}}\right)=0$

$\Leftrightarrow x^2-x=0 \Leftrightarrow x=0$ hoặc $x=1$.

Khi đó ta được nghiệm $\boxed{(x;y) \text{ là } (0;12) \text{ và } (1;11)}$.

**Bài 159: Giải hệ phương trình:** $\begin{cases} \sqrt{x+1}+\sqrt{(x+1)(y-2)}+x+5=2y+\sqrt{y-2} \\ \dfrac{(x-8)(y+1)}{x^2-4x+7}=(y-2)\left(\sqrt{x+1}-3\right) \end{cases}$.

**Lần 1 – THPT XUÂN TRƯỜNG**

**Lời giải tham khảo**

Điều kiện $x \ge -1; y \ge 2$.

Đặt $\sqrt{x+1}=a; \sqrt{y-2}=b$ $(a,b \ge 0)$, từ (1) ta có:

$a+ab+a^2-1+5=2(b^2+2)+b \Leftrightarrow a-b+ab-b^2+a^2-b^2=0$

$\Leftrightarrow (a-b)(1+2a+b)=0$

$\Leftrightarrow a=b$ (do $a,b \ge 0 \Rightarrow 1+2a+b>0$

$\Rightarrow \sqrt{x+1}=\sqrt{y-2} \Leftrightarrow y=x+3$

Thế vào (2) ta được:

$\dfrac{(x-8)(x+4)}{x^2-4x+7}=(x+1)\left(\sqrt{x+1}-3\right) \Leftrightarrow \dfrac{(x-8)(x+4)}{x^2-4x+7}=\dfrac{(x+1)(x-8)}{\sqrt{x+1}+3}$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=8 \\ \dfrac{x+4}{x^2-4x+7}=\dfrac{x+1}{\sqrt{x+1}+3} \ (*) \end{array}\right.$

+ $x=8 \Rightarrow y=11$;

+ $(*) \Leftrightarrow \left(\sqrt{x+1}+3\right)(x+4)=(x+1)(x^2-4x+7)$

$\Leftrightarrow \left(\sqrt{x+1}+3\right)\left[\left(\sqrt{x+1}\right)^2+3\right]=\left[(x-2)+3\right].\left[(x-2)^2+3\right]$ (**)

Xét hàm số $f(t)=(t+3)(t^2+3)$ với $t\in\mathbb{R}$ có $f'(t)=3(t+1)^2\geq 0\ \forall t\in\mathbb{R}$ nên $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Do đó $(**)\Leftrightarrow f\left(\sqrt{x+1}\right)=f(x-2)\Leftrightarrow\sqrt{x+1}=x-2\Leftrightarrow\begin{cases}x\geq 2\\x+1=x^2-4x+4\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}x\geq 2\\x^2-5x+3=0\end{cases}\Leftrightarrow x=\dfrac{5+\sqrt{13}}{2}$ (T/M)

$x=\dfrac{5+\sqrt{13}}{2}\Rightarrow y=\dfrac{11+\sqrt{13}}{2}$

Vậy hệ đã cho có nghiệm $(x;y)$ là $(8;11)$ và $\left(\dfrac{5+\sqrt{13}}{2};\dfrac{11+\sqrt{13}}{2}\right)$

**Bài 160: Giải hệ phương trình:** $\begin{cases}\sqrt{x^2+y}+\sqrt{3}=\sqrt{y^2-3x}+\sqrt{7}\\\sqrt{y-1}+2y^2+1=\sqrt{x}+x^2+xy+3y\end{cases}$.

**Lần 2 – THPT YÊN PHONG SỐ 2**

**Lời giải tham khảo**

+ Đk $y\geq 1, x\geq 0, y^2\geq 3x$

+ (2) $\Leftrightarrow\sqrt{y-1}-\sqrt{x}+(y-1)^2-x^2+y^2-xy-y=0$

$\Leftrightarrow(y-x-1)\left(\dfrac{1}{\sqrt{y-1}+\sqrt{x}}+2y-1+x\right)=0$

$\Leftrightarrow y-x-1=0\left(do\ \dfrac{1}{\sqrt{y-1}+\sqrt{x}}+2y-1+x>0\forall y\geq 1, x\geq 0\right)$

+ Thế y = x + 1 vào pt(1):

$\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2-x+1}=\sqrt{7}-\sqrt{3}$ (3)

Xét hàm số $f(x)=\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2-x+1}$

$f'(x)=\dfrac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x+1}}-\dfrac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x+1}}=\dfrac{2x+1}{\sqrt{(2x+1)^2+3}}-\dfrac{2x-1}{\sqrt{(2x-1)^2+3}}$

Xét hàm số g(t) = $\dfrac{t}{\sqrt{t^2+3}}$, g′(t) = $\dfrac{3}{\left(\sqrt{t^2+3}\right)^3}>0\forall t\in R$ nên hs g(t) đồng biến trên R

Do 2x + 1 > 2x – 1 nên g(2x + 1) > g(2x – 1), suy ra:

F′(x) = g(2x + 1) - g(2x – 1) > 0 ∀ x ∈ R

Do đó hàm số f(x) đồng biến trên R, nên (3) ⇔ f(x) = f(2) ⇔ x = 2

Vậy hệ có 1 nghiệm (x; y) = (2; 3)

**Bài 161: Giải bất phương trình:** $1+\sqrt{4x^2+20}\leq x+\sqrt{4x^2+9}$.

**Lần 2 – THPT YÊN LẠC**

**Lời giải tham khảo**

Bất phương trình tương đương:

$\sqrt{4x^2+9}+x-\sqrt{4x^2+20}-1\geq 0$

$$\Leftrightarrow (x-2)\left[\frac{4x+8}{\sqrt{4x^2+9}+5}-\frac{4x+8}{\sqrt{4x^2+20}+6}+1\right]\geq 0$$

Từ Bất phương trình ban đầu suy ra: $x-1\geq\sqrt{4x^2+20}-\sqrt{4x^2+9}>0\Rightarrow x>1$.
Do đó

$$\frac{4x+8}{\sqrt{4x^2+9}+5}-\frac{4x+8}{\sqrt{4x^2+20}+6}+1=(4x+8)\frac{1+\sqrt{4x^2+20}-\sqrt{4x^2+9}}{\left(\sqrt{4x^2+9}+5\right)\left(\sqrt{4x^2+20}+6\right)}+1>0$$

Nên nghiệm của bpt là: $x\geq 2$

**Bài 162: Giải hệ phương trình:** $\frac{x-3}{3\sqrt{x+1}}\leq\frac{2\sqrt{9-x}}{x}$ $(x\in\mathbb{R})$.

**Lần 2 – THPT YÊN THẾ**

**Lời giải tham khảo**

Bất phương trình tương đương:

$$\frac{\left(x+3+3\sqrt{x+1}\right)\left(x+3-3\sqrt{x+1}-2\sqrt{9-x}\right)}{x\left(3\sqrt{x+1}+x+3\right)}\leq 0$$

$$\Leftrightarrow\frac{x+3-3\sqrt{x+1}-2\sqrt{9-x}}{x}\leq 0$$

$$\Leftrightarrow\frac{\sqrt{x+1}\left(\sqrt{x+1}-3\right)+2\left(1-\sqrt{9-x}\right)}{x}\leq 0$$

$$\Leftrightarrow\frac{x-8}{x}\left(\frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}+3}+\frac{2}{1+\sqrt{9-x}}\right)\leq 0$$

$$\Leftrightarrow\frac{x-8}{x}\leq 0\Leftrightarrow 0<x\leq 8$$

**Bài 163: Giải hệ phương trình:** $\begin{cases}\sqrt{x+y(x+1)}+\sqrt{x}=y+\sqrt{y} & (1)\\ x^3+6x^2+20=171y+40(y+1)\sqrt{5y-1} & (2)\end{cases}$.

**Lần 3 – THPT YÊN THẾ**

**Lời giải tham khảo**

Phương trình:

$$(1)\Leftrightarrow\sqrt{x+y(x-1)}-y+\sqrt{x}-\sqrt{y}=0$$

$$\Leftrightarrow (x-y)\left[\frac{1+y}{\sqrt{x+y(x-1)}+y}+\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}\right]=0$$

$$\Leftrightarrow x=y$$

Thay vào pt (2) ta được:

$x^3+6x^2+20=171x+40(x+1)\sqrt{5x-1}$

$\Leftrightarrow \left(x-1-2\sqrt{5x-1}\right)\left[2(x+8)\sqrt{5x-1}+x^2+27x+12\right]=0$

$\Leftrightarrow x-1-2\sqrt{5x-1}=0 \Leftrightarrow x=11+2\sqrt{29} \Rightarrow y=11+2\sqrt{9}$

KẾT LUẬN:

**Bài 164: Giải hệ phương trình:** $\begin{cases}\sqrt{x^2+y}+\sqrt{3}=\sqrt{y^2-3x}+\sqrt{7}\\ \sqrt{y-1}+2y^2+1=\sqrt{x}+x^2+xy+3y\end{cases}$.

**Lần 2 – THPT YÊN PHONG SỐ 2**

**Lời giải tham khảo**

+ Đk $y\ge 1, x\ge 0, y^2\ge 3x$

+ (2) $\Leftrightarrow \sqrt{y-1}-\sqrt{x}+(y-1)^2-x^2+y^2-xy-y=0$

$\Leftrightarrow (y-x-1)\left(\dfrac{1}{\sqrt{y-1}+\sqrt{x}}+2y-1+x\right)=0$

$\Leftrightarrow y-x-1=0\left(do\ \dfrac{1}{\sqrt{y-1}+\sqrt{x}}+2y-1+x>0\forall y\ge 1, x\ge 0\right)$

+ Thế y = x + 1 vào pt(1):

$\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2-x+1}=\sqrt{7}-\sqrt{3}$ (3)

Xét hàm số $f(x)=\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2-x+1}$

$f'(x)=\dfrac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x+1}}-\dfrac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x+1}}=\dfrac{2x+1}{\sqrt{(2x+1)^2+3}}-\dfrac{2x-1}{\sqrt{(2x-1)^2+3}}$

Xét hàm số g(t) = $\dfrac{t}{\sqrt{t^2+3}}$, g′(t) = $\dfrac{3}{\left(\sqrt{t^2+3}\right)^3}>0\forall t\in R$ nên hs g(t) đồng biến trên R

Do 2x + 1 > 2x – 1 nên g(2x + 1) > g(2x – 1), suy ra:

F′(x) = g(2x + 1) - g(2x – 1) > 0 ∀ x ∈ R

Do đó hàm số f(x) đồng biến trên R, nên (3) ⇔ f(x) = f(2) ⇔ x = 2

Vậy hệ có 1 nghiệm (x; y) = (2; 3)